MÉCANIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE

M. DELANETTE
H. DUBOIS

AIDE-MÉMOIRE
TECHNOR
DELAGRAVE

TECHNIQUES ET **NOR**MALISATION

Collection publiée sous la direction de A. CHEVALIER

Professeur à l'ENNA de Paris, ex-chef de fabrication dans l'Industrie

MÉCANIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE

CONCOURS ET EXAMENS
DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
BEI - BP - BAC - BT

par

M. DELANETTE
Ingénieur A.M.,

H. DUBOIS
Ancien élève de l'E.N.S.E.T.

Professeurs de l'enseignement technique

avec la collaboration de

A. CHEVALIER et R. CLUZEL
PROFESSEURS A L'E.N.N.A. DE PARIS

PARIS
LIBRAIRIE DELAGRAVE
15, rue Soufflot, 15
1959

A LA MÊME LIBRAIRIE

Sous la direction de A. CHEVALIER, professeur à l'ENNA de Paris, ex-chef de fabrication dans l'Industrie

Collection AIDE-MÉMOIRE TECHNOR

en ouvrages reliés 13,5 × 21

(avec la collaboration de A. CHEVALIER et R. CLUZEL)

- **DESSIN INDUSTRIEL,** par H. RIBÉROL.
- **ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE,** par P. HEINY.
- **INDUSTRIE DU BOIS,** par E. BAILLEUL et J. HEURTEMATTE.
- **TECHNIQUE DE L'AUTOMOBILE,** par M. DELANETTE.
- **MÉCANIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE,** par M. DELANETTE et H. DUBOIS.
- **MATHÉMATIQUES,** par R. CLUZEL.
- **TECHNOLOGIE DE CONSTRUCTION**
- **GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE**
- **CONSTRUCTIONS MÉTALLIQUES**
- **TRAVAIL DES PLASTIQUES**
- **USINAGE DES MÉTAUX**
- **ÉLECTRONIQUE ET RADIO**
- **SCIENCES APPLIQUÉES**

etc...

} Ouvrages en préparation

Collection TECHNOLOGIE DES FABRICATIONS MÉCANIQUES

en 20 fascicules 22,5 × 28, par centres d'intérêt

1. **Le Livret de l'Apprenti débutant,** par A. CHEVALIER et E. LECŒUR.
2. **Traçage et Travaux de l'Ajusteur-mécanicien,** par E. LECŒUR.
3. **Le Tournage des métaux,** par A. CHEVALIER et R. JOLYS.
4. **Le Fraisage des métaux,** par A. DOURNIER et R. SAGET.
5. **Rabotage et brochage,** par R. DIETRICH et M. VIGNAUD.
6. **Perçage et alésage,** par A. CHEVALIER et L. LABURTE.
7. **Usinage par abrasion,** par A. CHEVALIER et R. LABILLE.
8. **Assemblage et montage,** par E. LECŒUR.
9. **Matériaux, Propriétés et traitements,** par J. LIGNON et MIJON.
10. **Usinage sans copeaux** (en préparation).
11. **La coupe des métaux** (en préparation).
12. **Étude des machines-outils,** par R. JOLY, R. PASQUET et R. VACQUER.
13. **Métrologie dimensionnelle,** par A. CHEVALIER et L. LABURTE.
14. **Automatisation,** par M. BERNARD.
15. **Organisation des ateliers,** par A. HEURLEY et J. ROLLET.
16. **Analyse des travaux,** par A. CHEVALIER et E. LECŒUR.
17. **Étude des temps,** par A. CHEVALIER et Bureau des Temps Élémentaires.
18. **Bureau d'Études. Le projet en construction mécanique** (en préparation).
19. **Montages d'usinage,** par A. CHEVALIER et R. VACQUER.
20. **Méthodes de dessin industriel** par A. CHEVALIER et H. RIBÉROL.

Tables des logarithmes décimaux (nombres entiers, fractionnaires et rapports trigonométriques), par A. CHEVALIER et R. CLUZEL.

Tables de valeurs numériques : N^2, $\sqrt[2]{N}$, N^3, $\sqrt[3]{N}$, $1/N$ (nombres de 1 à 100 000) par A. CHEVALIER et R. CLUZEL.

Carnet d'atelier 56 A avec notice, par un groupe de professeurs.

TABLE DES MATIÈRES

1re PARTIE. — DOCUMENTATION TECHNIQUE

M		M	
	I. CINÉMATIQUE		V. RÉSISTANCES PASSIVES
1 à 4	Mouvement rectiligne uniforme.	76 à 78	Frottement de glissement.
5 à 7	Mouvement circulaire uniforme.	79	Résistance au roulement.
8 à 10	Mouvement rectiligne unif. varié.	80	Raideur des cordes.
11	Mouvement circulaire unif. varié.	80	Choc.
13 et 14	Mouvement rectiligne sinusoïdal.	81	Résistances diverses.
15 et 16	Hodographe d'un mouvement.		VI. CINÉMATIQUE APPLIQUÉE
17 à 21	Mouvements simultanés.	82	Système bielle-manivelle.
	II. STATIQUE	83	Joints.
22 à 24	Principes généraux.	84	Mécanismes à retour rapide.
25 et 26	Equilibre d'un corps solide.	85	Excentriques.
27	Contacts et appuis.	86	Cames.
28 à 31	Composition et décomposition des forces.	87	Roues de friction.
32 à 34	Funiculaire.	88 à 95	Engrenages.
35 et 36	Moment algébrique des forces.	96	Vis-écrou et vis sans fin.
37 et 38	Couples.		VII. MOTEURS THERMIQUES
39 à 41	Centre de gravité.	97 et 98	Notions de thermodynamique.
42 et 43	Conditions analytiques de l'équilibre.	99 à 102	Moteurs à explosions.
	III. DYNAMIQUE	103 à 106	Moteurs Diesel. Puissance.
44	Principe fondamental.	107 à 110	Moteurs à turbines.
45	Moment d'inertie.		MOTEURS HYDRAULIQUES
46 et 47	Travail et puissance.	111 et 112	Turbines hydrauliques.
48	Energie mécanique.		VIII. MÉCANIQUE DES FLUIDES
51 et 52	Machines simples.	113	Propriétés des liquides.
53	Quantité de mouvement.	114	Hydrostatique.
54	Force centrifuge.	115	Ecoulement en régime permanent.
55	Pendule.	116	Charge et perte de charge.
	IV. RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX	117	Orifices, déversoirs.
56 et 57	Traction simple ou extension.	118	Ajutages.
58 à 60	Compression.	119	Mesures.
61 et 62	Cisaillement ou glissement transversal.	120	Canalisations.
63 et 64	Torsion simple.	121 à 124	Résistance de l'air sur les surfaces planes ou courbes et sur les corps quelconques.
65 à 71	Flexion plane.	125	Polaire de profil.
72 et 73	Sollicitations composées.	126 à 128	Applications à l'aviation.
74 et 75	Flambement.		

Systèmes d'unités utilisés en mécanique (voir M. 49 et M. 50).

2e PARTIE. — DOCUMENTATION GÉNÉRALE

Doc.		Doc.	
1	Lettres et chiffres.	28	Transformations trigonométriques
2	Nombres normaux.	29 et 30	Table des sinus et cosinus.
3	Principales unités.	31 et 32	Table des tangentes et cotangentes.
4	Equivalences.	33	Degrés - Grades - Radians.
5	Arithmétique.	34	Grades.
6	Nombres premiers.	35	Triangle rectangle.
7 et 8	Nombres approchés.	36	Triangle quelconque.
9 et 10	Calcul algébrique.	37 et 38	Arc. Corde. Flèche. Segment.
11	Equations - Fonctions.	39	Circonférence (πD).
12	Courbes usuelles.	40	Cercle ($\pi D^2/4$).
13	Dérivées - Primitives.	41	Surfaces planes.
14	Logarithmes décimaux.	42	Solides (à surf. développable).
15 et 16	Table des logarithmes.	43	Solides (à surf. non développable).
17 et 18	Table des carrés.	44	Centre de gravité.
19 et 20	Table des racines carrées.	45	Résistance des matériaux.
21 et 22	Table des cubes.	46	Poids des barres et tôles.
23 et 24	Table des racines cubiques.	47	Caractéristiques des produits.
25 et 26	Table des inverses.		
27	Fonctions circulaires.		

INDEX

Mots	Pages
Abaques (coupe)	M. 4
Abaques (poulies)	M. 7
Acc. angulaire	M. 11
Acc. linéaire	M. 8
Acc. instantanée	M. 12
Acc. moyenne	M. 12
Acc. tangentielle	M. 12
Acc. normale	M. 12
Acier	Doc. 47
Action de contact	M. 23
Action à distance	M. 23
Action mécanique	M. 23
Action et réaction	M. 23
Adhérence	M. 27-79
Adiabatique	M. 98
Admission	M. 99
Aiguille (turbines)	M. 112
Air	Doc. 47
Ajutage	M. 118
Alésage (moteurs)	M. 99
Alliévi (formule d')	M. 120
Allongement	M. 56-57
Allumage	M. 99
Aluminium	Doc. 47
Ammoniaque	Doc. 47
Ampère	Doc. 3
Amplitude	M. 13
Angle d'adhérence	M. 27
Angle de calage	M. 123
Antimoine	Doc. 47
Appui	M. 27-67-68
Arabes (chiffres)	Doc. 1
Arbre (torsion)	M. 64
Arc	Doc. 37
Arc-boutement	M. 77
Archimède (th. d')	M. 114
Archimède (spirale)	
Argent	Doc. 47
Articulation	M. 27
Aubage	M. 110
Aube	M. 109
Auget	M. 112
Avance (moteurs)	M. 101
Bâche (turbines)	M. 112
Bar	M. 49
Bar	Doc. 3
Balayage (moteur)	M. 104
Bazin (formule de)	M. 120
Benzine	Doc. 47
Bernoulli (th. de)	M. 116
Bielle-manivelle	M. 82
Bielle	M. 99
Bismuth	Doc. 47
Bougie	Doc. 3
Bras de levier	M. 37
Brinell (nb. de)	M. 58
Bronze	Doc. 47
Brown-Boveri (turbine)	M. 110
Câble	M. 57
Calorie	M. 49
Calorie	Doc. 3
Came	M. 86
Caoutchouc	Doc. 47
Caract. (gaz)	M. 98
Caract. (log)	Doc. 14
Caract. (moteur)	M. 105
Carburateur	M. 99
Carnot (principe de)	M. 97
Carnot (rendement)	M. 97
Carrés (table)	Doc. 17
Carter	M. 99
Centre de gravité	M. 24-39
Centre de gravité	Doc. 44
Centre de percussion	M. 80
Centre de poussée	M. 121
Chaîne	M. 99
Charge de rupture	M. 57
Charge répartie	M. 68
Charge concentrée	M. 68
Charge (fluides)	M. 116
Charge (pertes de)	M. 113-116
Cheval	M. 49
Cheval	Doc. 3
Chiffres	Doc. 1
Choc	M. 80
Chrome	Doc. 47
Chute des corps	M. 9
Cisaillement	M. 61
Clavetage	M. 61
Cobalt	Doc. 47
Coeff. de sécurité	M. 57
Coeff. d'adhérence	M. 27
Coeff. de tangage	M. 125
Coin	M. 52
Composition des mouvements	M. 17
Compressibilité (liquides)	M. 114
Compression (matériaux)	M. 58
Compression (moteurs)	M. 100
Conduites forcées	M. 120
Conduites libres	M. 120
Cône	Doc. 42
Cône d'adhérence	M. 27
Cône de friction	M. 87
Conservation de l'énergie	M. 48
Consommation (moteur)	M. 106
Contrainte	M. 56
Corde de profil	M. 123
Corps polis	M. 27
Corps rugueux	M. 27
Cosinus (table)	Doc. 29
Cotangente (table)	Doc. 31
Coulomb	Doc. 3
Coup de bélier	M. 120
Couple	M. 37
Couple moteur	M. 105
Courbes caractéristiques	M. 106
Courroies	M. 6-77
Course	M. 4
Crémaillère	M. 90
Culasse	M. 99
Cycle	M. 98
Cycloïde	Doc. 12
Cylindre	M. 98
Cylindrée	M. 99
Darcy (formule de)	M. 120
Débit	M. 115
Décagone	Doc. 41
Décélération	M. 8
Décomposition des forces	M. 31
Déformation (matériaux)	M. 56
Déformation (flexion)	M. 70
Déflecteur	M. 102
Degré centésimal	Doc. 3
De Laval (turbine)	M. 110
Démarrage (accélération)	M. 8
Démarrage (inertie)	M. 57
Dérivée	Doc. 13
Détente	M. 98
Deux temps (moteur à)	M. 102
Développante de cercle	M. 89
Déversoir	M. 117
Diagramme (moteurs)	M. 100
Diagramme (mouvements)	M. 2-10
Diagramme (résistance matériaux)	M. 56
Diamètres (poulies)	M. 6
Diesel	M. 103-104
Différentiel	M. 95
Diffuseur	M. 112
Distribution	M. 99
Dodécagone	Doc. 41
Double flux	M. 108
Dureté et résistance	M. 58
Dyne	M. 49
Dyne	Doc. 3
Eau	Doc. 47
Echangeur	M. 107
Echappement	M. 100
Eclairement	Doc. 3
Ecoulement	M. 115
Effet Magnus	M. 128
Effet réactif	M. 108
Effort tranchant	M. 69
Elancement	M. 74
Elasticité	M. 56
Elongation	M. 13
Ellipse	Doc. 12
Ellipsoïde	Doc. 43
Endurance	M. 58
Energie	Doc. 3
Energie cinétique	M. 48
Energie interne	M. 97
Engrenages cyl. dr.	M. 88
Engrenages cyl. hél.	M. 91
Engr. coniques	M. 93
Epaisseur des enveloppes	M. 59
Epicycloïde	M. 95
Epure circulaire	M. 101
Equation	Doc. 11
Equation horaire	M. 1
Equation (forces)	M. 24
Equilibre (calcul)	M. 42
Equilibre (corps immergés)	M. 114
Equilibre (corps flottants)	M. 114

INDEX *(Suite)*

Mots	Pages
Equipage (poulies et courroies)	M. 6
Equival. (principe)	M. 97
Erg	M. 49
Erg	Doc. 3
Espace (mouvt)	M. 1
Espace nuisible	M. 99
Etain	Doc. 47
Etages de pressions	M. 110
Etages de vitesses	M. 110
Etat d'équilibre	M. 98
Euler (formule d')	M. 74
Evolution d'un gaz	M. 98
Excentriques	M. 85
Explosions	M. 99
Extension	M. 56
Facteurs premiers	Doc. 6
Fatigue (matériaux)	M. 58
Fer	Doc. 47
Fibre	M. 65
Filet de vis	M. 61
Finesse	M. 123-125
Flambement	M. 74
Flamant (formule de)	M. 120
Flèche	M. 70
Flèche	Doc. 37
Flexion plane	M. 65
Flexion composée	M. 72-73
Fluage	M. 107
Fluidité	M. 113
Flux	Doc. 3
Fonte	Doc. 47
Force	M. 23
Force	Doc. 3
Force centrifuge	M. 54
Francis (turbine)	M. 112
Freinage	M. 8
Fréquence	M. 13
Frottement	M. 76-77
Funiculaire	M. 32-68
Fusée	M. 108
Giorgi (système)	M. 50
Giorgi	Doc. 3
Glissement	M. 76-77-78
Graisse	Doc. 47
Grandeur	M. 22
Grec (alphabet)	Doc. 1
Guldin (th. de)	M. 41
Guldin	Doc. 43
Harnais d'engr.	M. 94
Hauteur piézométrique	M. 115
Hélice	M. 17
Hélice (turbine)	M. 112
Hexagone	Doc. 41
Hodographe	M. 15
Hooke (Loi de)	M. 56
Huile	Doc. 47
Hydrogène	Doc. 47
Hyperbole	Doc. 12
Hypoténuse	Doc. 35
Identité	Doc. 10
Impulsion	M. 53
Incidence	M. 122
Inertie	M. 44
Injection	M. 103
Intensité (force)	M. 24
Intensité (résultante)	M. 25-26
Interférence	M. 89
International (système)	Doc. 2
Inverseur (turbine)	M. 110
Isobare	M. 98
Isochore	M. 98
Isotherme	M. 98
Joints	M. 83
Joule	M. 50
Joule	Doc. 3
Kaplan (turbine)	M. 112
Kilogramme (masse)	M. 49-M. 50
Kilogramme-force	M. 49-M. 50
Kilogrammètre	M. 49-M. 50
Kilojoule	M. 49
Kilowatt	M. 49
Lâcher d'un corps dans le vide	M. 20
Lâcher d'une bombe	M. 20
Laiton	Doc. 47
Latin (alphabet)	Doc. 1
Lettres	Doc. 1
Lévy (formule de)	M. 120
Logarithme (table)	Doc. 15
Losange	Doc. 41
Lumen	Doc. 3
Lux	Doc. 3
Mach (nombre de)	M. 128
Manivelle	M. 84
Masse	M. 44
Manométrique (rendement)	M. 111
Mantisse	Doc. 14
Maquette (similitude)	M. 128
Mécanismes	M. 84
Mercure	Doc. 47
M.K.S.A. (système)	Doc. 3
M.K.S.A. (système)	M. 50
Module d'élasticité	M. 63-70
Module (engrenage)	M. 71
Moment d'inertie	M. 45-65-66
Moment fléchissant	M. 67-68
Moment d'une force	M. 35
Moment de tangage	M. 125
Moment de vecteur	M. 23
Moteurs thermiques	M. 97
Motopropulseur	M. 108
Motoréacteur	M. 108
Mouvements :	M. 1-2
— circul. unif.	M. 5-6
— uniformément varié	M. 11
— d'entraînement	M. 17
— des projectiles	M. 21
Mouvt d'un véhicule	M. 10
— parabolique	M. 18
— rectil. sinusoïdal	M. 13
— rectil. uniforme	M. 2
— rect. uniformément varié	M. 8
— relatif	M. 17
— résultant	M. 17
— simultané	M. 17-18
M.T.S. (système)	Doc. 3
M.T.S. (système)	M. 49
Néperien (log)	Doc. 13
Newton	M. 50
Newton	Doc. 3
Nickel	Doc. 47
Nœud (funiculaire)	M. 32
Nombres premiers	Doc. 6
Octogone	Doc. 39
Ohm	Doc. 3
Onglet	Doc. 42
Organique (rendement)	M. 111
Orifices	M. 117
Oxygène	Doc. 47
Palan	M. 51
Pale	M. 112
Parabole	Doc. 12
(diagrammes)	M. 10
(trajectoire)	M. 18
Parabole (tir)	M. 21
Parallélépipède	Doc. 42
Parallélogramme	Doc. 41
Parsons (turbine)	M. 110
Pascal	M. 50
Pascal	Doc. 3
Pascal (th. de)	M. 114
(triangle de)	Doc. 10
Pelton (turbine)	M. 112
Pendule	M. 55
Percussion	M. 80
Période	M. 13
Perte de charge	M. 113
Pertes marginales	M. 122
Pétrole	Doc. 47
P.G.C.D.	Doc. 6
Phosphore	Doc. 47
Pièze	Doc. 3
Pièze	M. 49
Pignon et crémaillère	M. 90
Pince	M. 62
Piston	M. 99
Pivot	M. 60
Plafond	M. 127
Plan incliné	M. 52
Plan de charge	M. 116
Platine	Doc. 47
Plomb	Doc. 47
Poids	Doc. 46
Poids	M. 24
Poise	M. 49
Poisson (coef. de)	M. 57
Poinçonnage	M. 61
Pointeau (turbine)	M. 112
Polaire	M. 125

INDEX *(Suite)*

Mots	Pages
Pôle	M. 32
Polygone (dynamique et funiculaire)	M. 32
Polygone	Doc. 41
Polytropique	M. 98
Portance	M. 125
Portée (tir)	M. 21
Postcombustion	M. 108
Pouce	Doc. 4
Poulies et courroies	M. 6
Poulies étagées	M. 7
Poulies fixe, mobile	M. 51
Poussée	M. 108-123
Poussoir	M. 99
Poutres	M. 67-68
P.P.C.M.	Doc. 6
Prandtl (formule de)	M. 126
Presse hydraulique	M. 114
Pression (dans un liquide)	M. 114
Pression (moteurs)	M. 106
Pression	Doc. 3
Primitive	M. 12
Prisme	Doc. 42
Progression	Doc. 10
Projectiles	M. 21
Puissance (moteur)	M. 105
Puissance	M. 47
Puissance	Doc. 9
Pulsation	M. 13
Pulsoréacteur	M. 108
Pyramide	Doc. 42
Quantité de mouvement	M. 53
Quadrilatère	Doc. 41
Racine carrée	Doc. 19
Racine cubique	Doc. 23
Racine (équations)	Doc. 11
Radian	Doc. 3
Raideur des cordes	M. 80
Raison d'un train	M. 94
Ralentissement	M. 10
Rankine (formule de)	M. 74
Rateau (turbine)	M. 110
Rayon de courbure	M. 12
Rayon polaire	M. 32
Réaction (moteur à)	M. 108
Réaction (action et)	M. 23
Rectangle	Doc. 41
Redresseur	M. 110
Refroidissement	M. 99
Réglages (moteurs)	M. 101
Régulatrice (pale)	M. 112
Renard (série)	Doc. 2
Rencontre de mobiles	M. 3
Rendement	M. 106
Résistance de l'air	M. 81
Résistance due aux courbes	M. 81
Résistance des matériaux	M. 60
Ressort	M. 64
Résultante	M. 28-29
Reynolds (nb. de)	M. 113
Rivets	M. 62
Rivure	M. 62
Romains (chiffres)	Doc. 1
Rotor	M. 107
Roues de friction	M. 87
Roues et vis sans fin	M. 96
Roulement	M. 79
Saint-Venant (formule de)	M. 73
Scalaire	M. 22
Secteur (sphérique)	Doc. 43
Segment (cercle)	Doc. 37
Segment (parabole)	Doc. 41
Seigle et Crétin	M. 73
Séjourné	M. 58
Sinus (table)	Doc. 29
Sollicitations	M. 56 à 73
Soufre	Doc. 47
Soupape	M. 99
Spectre aérodynamique	M. 123
Sphère	Doc. 43
Spirales	Doc. 12
Stator	M. 107
Statoréacteur	M. 108
Sthène	M. 49
Sthène	Doc. 3
Stokes (unités)	M. 49
Stokes (formule de)	M. 113
Strand (formule de)	M. 74
Striction	M. 56
Tangente (table)	Doc. 31
Taux compression	M. 99
Taux remplissage	M. 99
Tension	M. 25
Thermie	M. 49
Thermie	Doc. 3
Thermodynamique	M. 97
Tirage (véhicule)	M. 79
Tore	Doc. 43
Toricelli (relation de)	M. 117
Torsion	M. 63-73
Tourbillon (turbine)	M. 112
Tourillon	M. 71
Traction	M. 56
Traînée	M. 123
Train d'engrenages	125-126
Trajectoire	M. 1-12
Trapèze	Doc. 41
Travail	M. 46
Triangle des vitesses	M. 111
Triangle	Doc. 35
Treuil	M. 51
Tube de Pitot	M. 119
Tube de Darcy	M. 119
Tubes et enveloppes	M. 59
Turbine à gaz	M. 107-108
Turbine à vapeur	M. 110
Turbine-hélice	M. 112
Turbine hydraul.	M. 111
Turbopropulseur	M. 108
Turboréacteur	M. 108
Tuyère	M. 110
Unités (systèmes)	M. 49-50
Unités de force	M. 24
Unités de moment	M. 24
Valet de menuisier	M. 78
Vanadium	Doc. 47
Vecteur	M. 22
Vecteur vitesse	M. 15
Venturi	M. 119
Vilebrequin	M. 99
Vis	M. 52-78
Vis-écrou	M. 96
Viscosité	M. 113
Viscosité (unités)	M. 49-50
Vitesse	M. 2-10
Vitesse angulaire	M. 5
Vitesse de coupe	M. 4
Vitesse de rotation	M. 5
Vitesse linéaire	M. 5
Vitesse circonf.	M. 5
Vitesse des poulies	M. 6-7
Vitesse spécifique (turbines)	M. 111
Volant	M. 11
Volt	Doc. 3
Volumétrique (rendement)	M. 111
Watt	M. 50
Willis (formule de)	M. 95
Young (module de)	M. 56
Zinc	Doc. 47

Dans le présent numéro, les références aux normes Françaises (N.F.) sont données avec l'autorisation de l'Association Française de Normalisation (23, rue Notre-Dame-des Victoires, Paris). Nous rappelons que seules font foi les normes originales diffusées par l'A.F.NOR dans les éditions les plus récentes.

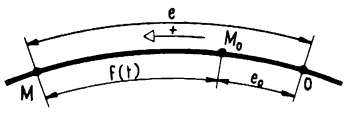
I

CINÉMATIQUE

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME
MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME
MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT VARIÉ
MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORMÉMENT VARIÉ
MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOÏDAL
HODOGRAPHE D'UN MOUVEMENT
MOUVEMENTS SIMULTANÉS

M. 1 LES MOUVEMENTS

①



DÉFINITIONS

Un corps est en mouvement par rapport à un système de référence lorsque la distance qui le sépare d'un point quelconque de ce système varie avec le temps.

Trajectoire d'un point mobile.

Lieu géométrique des positions occupées par le point dans l'espace au cours du temps.

— **Trajectoire rectiligne.** *Ex : Coulisseau en mouvement sur une glissière ;*

— **Trajectoire circulaire.** *Ex : Un point d'une poulie en rotation ;*

— **Trajectoire parabolique.** *Ex : Obus à la sortie de la bouche d'un canon ;*

— **Trajectoire cycloïdale.** *Ex : Valve d'une roue de camion en mouvement ;*

— **Trajectoire hélicoïdale.** *Ex : Point d'un filet d'une vis tournant dans son écrou.*

Mouvement continu.

A lieu dans le même sens pendant la durée du mouvement.
Ex : Scie à ruban ; fraise en rotation.

Mouvement alternatif.

A lieu tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre.
Ex : Table de raboteuse ; outil d'étau-limeur.

Remarque. En général, les mouvements circulaires sont continus et les mouvements alternatifs sont rectilignes.

ÉTUDE DU MOUVEMENT D'UN POINT (fig. 1 et voir M. 2, fig. 1).

— marquer sur la trajectoire un point de repère O_e ou O appelé **origine des espaces ;**

— choisir arbitrairement une **origine des temps** O_t (voir M. 2, fig. 1) ;

— repérer la position du mobile à **l'origine du mouvement** O_m ou M_0 ;

— déterminer un sens de parcours positif de la trajectoire ;

— considérer une position M au temps t, M_1 et t_1, M_2 et t_2... ;

— choisir les unités.

Remarque. En général, on fait coïncider les points O_t et O_m (fig. 1).

Espace initial e_0.

C'est la longueur de la portion de trajectoire comprise entre l'origine des espaces O ou O_e et la position du mobile à l'origine des temps M_0 ou O_m.

Équation horaire.

Relation algébrique qui permet de calculer la distance **e** parcourue par le mobile dans un certain temps **t.**
La distance **e** est fonction du temps **t.**

$$\boxed{e = e_0 + f(t)}$$

ou

$$\boxed{e - e_0 = f(t)}$$

Exemple. La relation $e = 215 + 60t$ exprime l'équation horaire du mouvement d'une automobile partie de la borne kilométrique 215 et roulant constamment à 60 kilomètres à l'heure.

Unités :

e s'exprime en *km*, en *m* ou en sous-multiples du mètre.
t s'exprime en heures (*h*), ou en minutes (*mn*) ou en secondes (*s*).

Dans l'exemple ci-dessus :

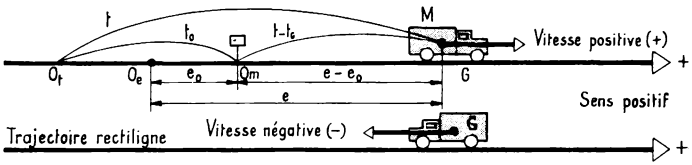
$$e = 215 + 60\,t$$

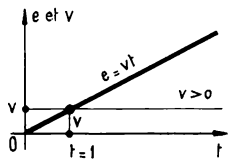
(en *km*) (en *h*)

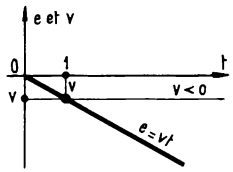
MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME (I)

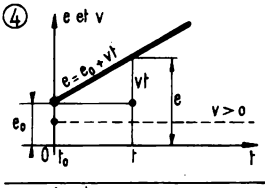
(M. R. U.)

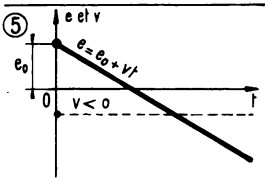
M. 2

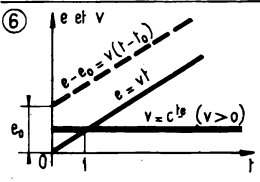
① 

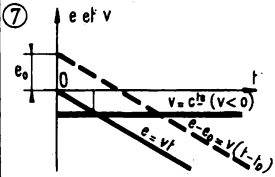
② 

③ 

④ 

⑤ 

⑥ 

⑦ 

DÉFINITION DU MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

Tous les points du corps en mouvement décrivent des **segments de droite parallèles et égaux.**

Les rapports entre les longueurs des chemins parcourus et les temps mis à les parcourir ont une valeur constante appelée **vitesse (v).**

Équation horaire.

1er cas. O_t, O_e et O_m sont confondus, $e_o = 0$, $t_o = 0$.

L'origine des espaces, l'origine des temps et l'origine du mouvement sont confondus en O_m ou M_o.

$$\boxed{\frac{e}{t} = v} \quad \text{ou} \quad \boxed{e = vt}$$

Si t = 1, e = v donc v s'évalue en mètres par seconde (symbole : *m/s*) ou en unités plus appropriées (*km/h*).

2e cas. Il existe un espace initial $e_o \neq 0$ mais $t_o = 0$

$$\boxed{e = e_o + vt} \quad \text{ou} \quad e - e_o = vt.$$

3e cas. L'origine des temps et l'origine des espaces ne coïncident pas avec l'origine du mouvement. $t_o \neq 0$ et $e_o \neq 0$.

$$\boxed{e = e_o + v(t - t_o)} \quad \text{ou} \quad e - e_o = v(t - t_o) \text{ (fig. 1).}$$

Remarque. Un sens positif de déplacement étant choisi
- $v > 0$ si le mouvement a lieu dans ce sens positif ;
- $v < 0$ si le mouvement a lieu dans le sens contraire.

Diagrammes de e et v.

1er cas : e = vt (v constante)	Fig. 2 : v > 0	Fig. 3 : v < 0
2e cas : e = e_o + vt	Fig. 4 : v > 0	Fig. 5 : v < 0
3e cas : e = e_o + v(t − t_o)	Fig. 6 : v > 0	Fig. 7 : v < 0

Problème. Une automobile passe à 8 *h* 20 *mn* devant la borne 18 et à 10 *h* 50 *mn* devant la borne 138. Trouver l'équation horaire du mouvement qui est uniforme depuis le départ à 8 *h*.

Solution : Unités : *h*, *km* et *km/h*.

Prenons $t_o = 0$ (O_t et O_m confondus) (2e cas ci-dessus).

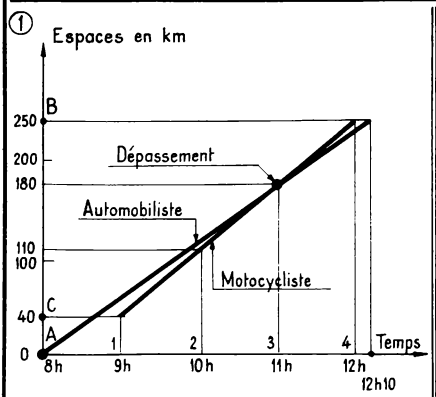
position	O_m ou O_t	M_1	M_2	M
heure	8 *h*	8 *h* 20	10 *h* 50	X
temps	$t_o = 0$	$t_1 = 0$ *h* 20	$t_2 = 2$ *h* 50	t
espace	$e_o = ?$	$e_1 = 18$	$e_2 = 138$	e

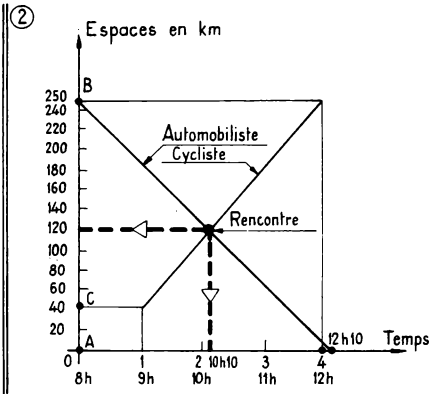
$$\begin{cases} e_1 = e_o + vt_1 \\ e_2 = e_o + vt_2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 18 = e_o + \frac{v}{3} \\ 138 = e_o + \frac{17v}{6} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} e_o = 2 \text{ km} \\ v = 48 \text{ km/h} \end{cases}$$

Equation horaire : $e = e_o + vt$ soit **e = 2 + 48 t.**

M. 3 — MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME (2)

RENCONTRE DE MOBILES





APPLICATION

Problème. Une voiture automobile, partie à 8 *h* d'un lieu A en direction d'un lieu B situé à 250 *km* de A, roule à une vitesse constante de 60 *km/h*. Un motocycliste parti à 9 *h* de C situé sur le parcours AB à 40 *km* de A, roule à la vitesse constante de 70 *km/h*.

1. Déterminer graphiquement
   - les heures d'arrivée en B des deux véhicules ;
   - la distance de A au point où l'un des véhicules dépasse l'autre ;
   - l'heure du dépassement.
2. Résoudre ce problème par le calcul.

Conseils.

Il faut indiquer:

- les unités employées; ici longueur en *km*, temps en *h*, vitesses en *km/h* ;
- les origines des espaces et des temps; ici A (espaces) et 8 *h* (temps) ;
- les échelles adoptées pour **e** et **t**.

Solution graphique (fig. 1).

Heures d'arrivée en B :

- de l'automobiliste : **12** *h* **10** *mn* ;
- du motocycliste : **12** *h*.

Heure de dépassement : **11** *h* (à la distance 180 *km* du point A).

Solution par le calcul.

Equation du mouvement de l'automobile :

$e = vt$; $v = 60$ donc $e = 60t$.

Equation du mouvement de la motocyclette :

$e - e_0 = v(t - t_0)$; $e_0 = 40$; $t_0 = 1$
$v = 70$ donc $e - 40 = 70(t - 1)$.

Heures d'arrivée en B ($e = 250$) :

- de l'automobiliste :
  $250 = 60t \longrightarrow t = 4\ h\ 10\ mn$;
  heure d'arrivée :
  $8\ h + 4\ h\ 10 = \mathbf{12\ h\ 10}\ mn$;
- du motocycliste :
  $250 - 40 = 70\ (t - 1) \longrightarrow t = 4\ h$;
  heure d'arrivée :
  $8\ h + 4\ h = \mathbf{12}\ h$.

Le motocycliste dépasse l'automobiliste.

La résolution du système d'équation :

$$\begin{cases} e = 60t. \\ e = 40 + 70\ (t - 1) \end{cases}$$

donne la distance de A au point de dépassement et l'heure du dépassement :

$e = 180\ km$; $t = 3\ h$;

Heure du dépassement : $8\ h + 3\ h = \mathbf{11}\ h$.

Remarque. Si l'automobiliste s'était dirigé de B vers A, il faudrait prendre pour sa vitesse $v = -60\ km/h$.

L'équation horaire du mouvement serait :

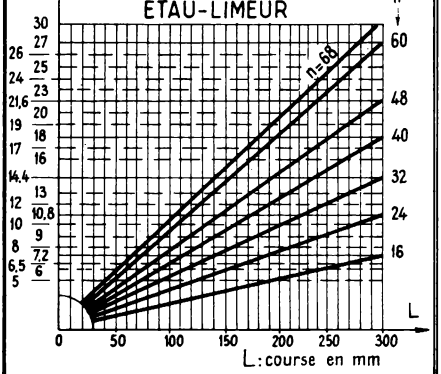
$e - e_0 = -60t$ avec $e_0 = 250$
soit $e - 250 = -60t$.

La figure 2 donne la solution graphique.

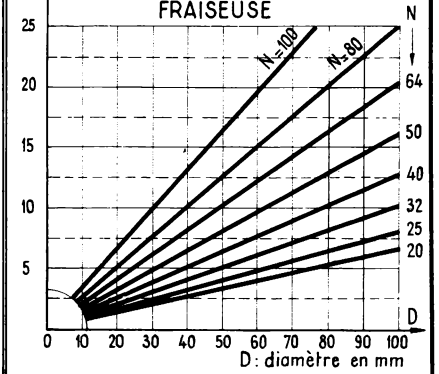
VITESSES DE COUPE
DES MACHINES-OUTILS

M. 4

① V en m/mn — ETAU-LIMEUR



② V en m/mn — FRAISEUSE



DÉFINITIONS DE LA VITESSE DE COUPE

La vitesse de coupe sur machines-outils : **v** s'exprime en *m/mn* pour les métaux ; en *m/s* pour les bois ; en *m/s* pour les meules.

1. ***Pièce à usiner fixe et outil mobile*** *(scie, foret, fraise, outil d'étau-limeur).*

La vitesse de coupe est la vitesse linéaire moyenne du tranchant de l'outil par rapport à la pièce.

2. ***Pièce à usiner mobile*** (mouvement uniforme) ***et outil fixe*** *(tour, raboteuse).*

La vitesse de coupe est la vitesse linéaire moyenne v du point de la pièce où l'outil l'attaque.

Abaque pour un étau-limeur (fig. 1).

La vitesse de coupe v en *m/mn* est supposée constante. En prenant :

L *(mm)*. longueur d'une course,
n. nombre de courses aller + nombre de courses retour,
t *(mn)*. durée d'une course aller,
t/2 *(mn)*. durée d'une course retour,

— **en fonction de v**, on a

$$t = \frac{L}{1\,000\,v},$$

— **en fonction de n**, on a

$$t + \frac{t}{2} = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad t = \frac{2}{3n},$$

d'où $\frac{L}{1\,000v} = \frac{2}{3n}$, soit $\boxed{v = \frac{3n \cdot L}{2\,000}}$.

En se donnant l'une de ces trois variables, **n** par exemple, on peut construire la courbe **v** en fonction de **L**. Cette courbe est une droite. Il y a autant de droites que de valeurs différentes de **n**.

L'ensemble des droites tracées dans le même système d'axes (L, v) constitue un **abaque** (fig. 1).

Pour **n** = 16, la valeur de **v** = 0,024 **L**.
Si **L** = 300 *mm*, on a **v** = 7,2 *m/mn*.

Remarque. L'étau-limeur considéré est à retour rapide : durée d'un retour = t/2.
Si la durée d'un retour = durée d'un aller = t, nous avons $2t = \frac{1}{n}$, soit :

$$\boxed{v = \frac{2n \cdot L}{1\,000}.}$$

Abaque pour une fraiseuse (fig. 2).

D *(mm)*. diamètre de la fraise ;
N *(tr/mn)*. vitesse de rotation de la fraise ;
v *(m/mn)*. vitesse de coupe.

$$\boxed{v = \frac{\pi \cdot D \cdot N}{1\,000}.}$$ Voir M. 5

N étant fixé, la courbe **v** en fonction de D est une droite. Prendre plusieurs valeurs de N correspondant aux vitesses de la broche.

M. 5 — MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME (I)

(M.C.U.)

DÉFINITION

Tous les points du corps en mouvement décrivent des cercles ou des arcs de cercle.

Chaque point décrit des arcs égaux dans des temps égaux.

Vitesses.

Vitesse de rotation : nombre de tours par minute n ou N (*tr/mn*).

Vitesse angulaire : angle balayé par un rayon pendant l'unité de temps :

— **s'exprime en radians par seconde** *(rd/s)* ;

— est **représentée par la lettre grecque** *oméga* (ω).

Un radian = l'angle au centre qui intercepte sur le cercle un arc de longueur égale à celle du rayon R.

Un tour = 2π radians.

Relation entre n et ω.

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$$

Vitesse linéaire ou circonférencielle :

Chemin parcouru par un point pendant l'unité de temps :

— **s'exprime en mètres par seconde** *(m/s)* ;

— est **représentée par la lettre v.**

Relation entre v, n *et* ω.

$$v = \frac{\pi \cdot n \cdot R}{30} = \omega \cdot R$$

Remarque. Les vitesses de coupe (voir M. 4) s'expriment en *m/mn* pour les métaux et en *m/s* pour les bois.

Équation horaire.

Analogue à celle du mouvement rectiligne uniforme.

$$S = v \cdot t$$

$$S = \frac{\pi \cdot n \cdot R \cdot t}{30}$$

$$S = \omega \cdot R \cdot t$$

— **S** (en *m*) : arc parcouru pendant le temps **t** (*s*) ;

— **v** en *m/s* ;

— **R** en *m* ;

— θ lettre grecque (thêta) = angle (en radians) décrit par un rayon dans le temps t.

$$\theta = \omega \cdot t$$

Le nombre de tours correspondant à θ est :

$$N_t = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\omega t}{2\pi}$$

Problème. Une poulie de diamètre D = 600 *mm* est calée sur un arbre tournant à n = 300 *tr/mn*.

Calculer :

1. la vitesse linéaire v de la jante ;
2. la vitesse angulaire ω de la poulie ;
3. la vitesse de rotation n′ de l'arbre pour avoir une vitesse linéaire v′ = 15 *m/s* sur la jante.

Solution :

1. $v = \frac{\pi \cdot n \cdot R}{30}$

$n = 300\ tr/mn$

$R = \frac{D}{2} = \frac{600}{2} = 300\ mm = 0{,}3\ m$

$v = \frac{3{,}14 \times 300 \times 0{,}3}{30}$

$= 3{,}14 \times 3$

$= 9{,}42\ m/s.$

2. $\omega = \frac{\pi n}{30}$

$= \frac{3{,}14 \times 300}{30}$

$= 31{,}4\ rd/s.$

3. $v' = \frac{\pi n' R}{30}$

$n = \frac{30 v'}{\pi R}$

$= \frac{30 \times 15}{3{,}14 \times 0{,}3}$

$\simeq 447\ tr/mn.$

Remarque. Pour un rayon donné R, les vitesses linéaires sont proportionnelles aux vitesses de rotation ou aux vitesses angulaires.

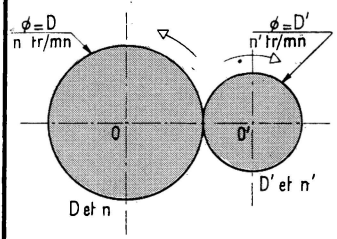
$$\frac{v}{v'} = \frac{n}{n'} = \frac{\omega}{\omega'}$$

MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME (2)

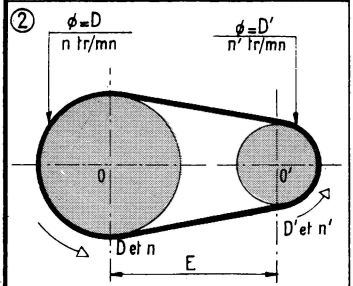
(M.C.U.)

M. 6

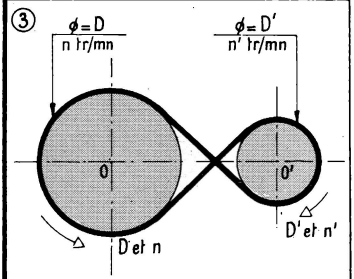
①



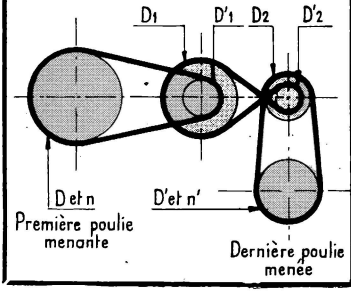
②



③



④



COMMANDE DES POULIES

Deux poulies s'entraînent par friction (fig. 1).

Rotations de sens contraires $\frac{n}{n'} = \frac{D'}{D}$.

Deux poulies s'entraînent par courroie.

Courroie droite (fig. 2).

Rotations de même sens :

$$\boxed{\frac{n}{n'} = \frac{D'}{D}}$$

Longueur approchée de la courroie droite.

$$L = \frac{\pi}{2}(D + D') + 2E + \frac{(D - D')^2}{4E}$$

ou encore :

$$L = \frac{\pi}{2}(D + D') + mE.$$

E = entr'axes des poulies.

m = coefficient variable avec l'arc d'enroulement, il est un peu plus grand que 2. On prend souvent m = 2,02.

Courroie croisée (fig. 3).

Rotations de sens contraires :

$$\boxed{\frac{n}{n'} = \frac{D'}{D}}$$

Longueur approchée de la courroie croisée.

$$L = \frac{\pi}{2}(D + D') + 2E + \frac{(D + D')^2}{4E}$$

Équipage de poulies et courroies (fig. 4).

$$r = \frac{n'}{n} = (-1)^p \times \frac{D \cdot D_1 \cdot D_2}{D'_1 \cdot D'_2 \cdot D'}$$

$$r = \frac{n'}{n} = (-1)^p \times \frac{\text{produit des } \Phi \text{ des roues menantes}}{\text{produit des } \Phi \text{ des roues menées}}$$

r = raison de l'équipage = rapport des vitesses de la dernière roue menée et de la première roue menante.

p = nombre de courroies croisées.

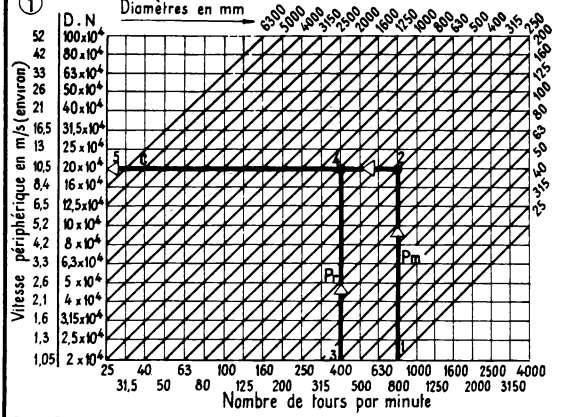
Si p est nul ou pair, r est positif : la première et la dernière roues tournent dans le même sens.
Si p est impair, r est négatif : la première et la dernière roues tournent en sens contraires.

Dans courroie croisée.

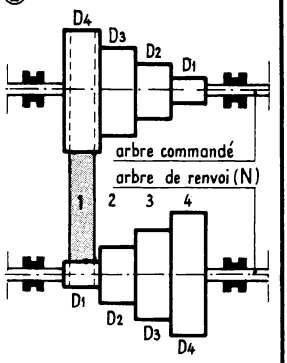
M. 7 MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU

COMMANDE DES POULIES

① Diamètres en mm



②



DIAMÈTRES ET VITESSES DES POULIES

Règle (norme française N.F.E. 22.001).

Le produit DN du diamètre D de la poulie par son nombre de tours par minute N est pris parmi les termes de la série Renard R_{10} des nombres normaux (voir Doc. 2).

Multiplier éventuellement les nombres par 10, 100, 1 000.

Lorsque le nombre de tours par minute N peut être choisi arbitrairement (cas fréquent), prendre un nombre de la série R_{10}. Faire de même pour le diamètre D.

Lorsque, pour des raisons techniques, N ne peut pas être un terme de la série R_{10} des nombres normaux, D doit être ramené à une valeur telle que le produit DN soit un nombre de R_{10}.

(Cas des moteurs électriques à courant alternatif et des machines réceptrices accouplées avec ces moteurs.)

Abaque des poulies (fig. 1). Permet de déterminer D et N.

Exemple. Soit une poulie motrice P_m de diamètre D = 250 *mm*, tournant à N = 800 *tr/mn*. Quel doit être le diamètre D′ de la poulie réceptrice P_r qui doit tourner à N′ = 400 *tr/mn*? Quelle sera la vitesse v de la courroie sans glissement?

Lecture sur l'abaque (fig. 1). La droite verticale P_m partant de N = 800 *tr/mn* (point 1) coupe l'oblique D = 250 en (2) ; l'horizontale passant par (2) et la verticale issue du point (3) (N′ = 400 *tr/mn*) se coupent au point (4) situé sur l'oblique D′ = 500, diamètre cherché.

En effet DN = D′N′ = 20 × 10^4.

L'horizontale issue de (2) donne v = 10,5 *m/s* sur l'axe des vitesses.

Poulies étagées (fig. 2).

Il faut : $\boxed{D_1 + D_4 = D_2 + D_3.}$

Les diamètres sont en progression arithmétique :

$$\boxed{D_4 - D_3 = D_3 - D_2 = D_2 - D_1}$$

N. vitesse de rotation de l'arbre de renvoi.

Vitesses sur l'arbre commandé.

(position 1)	(position 2)	(position 3)
$N_1 = N \cdot \frac{D_1}{D_4}$	$N_2 = N \cdot \frac{D_2}{D_3}$	$N_3 = N \cdot \frac{D_3}{D_2}$ etc.

Remarque. Les renvois de machines-outils, lorsqu'ils comportent une poulie à nombre pair d'étages actionnant une poulie identique, doivent nécessairement tourner à une vitesse qui est la moyenne géométrique de deux termes consécutifs de la série R_{10} des nombres normaux. Pour cette raison, prendre les diamètres des poulies dans la série R_{20}.

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT VARIÉ (M.R.U.V.) (I)

M. 8

DÉFINITIONS

Mouvement rectiligne varié.

La trajectoire du mobile est une droite ; les chemins parcourus dans des temps égaux ne sont pas tous égaux ; la vitesse n'a pas une valeur constante.

Mouvement uniformément varié.

La vitesse augmente **(mouvement uniformément accéléré)** ou diminue **(mouvement uniformément décéléré ou retardé)** de quantités égales dans des temps égaux.

Accélération : γ (lettre grecque *gamma*). Accroissement constant de vitesse en une unité de temps. L'accélération s'exprime en mètres par seconde, par seconde ($m/s/s$) ou (m/s^2).

Décélération : δ (lettre grecque *delta*), diminution constante de vitesse dans une seconde, elle correspond à une accélération négative :

$$\delta = -\gamma$$

Unités :

γ ou δ accélérations ou décélérations en $m/s/s$;
v. vitesses en m/s ;
e. espaces parcourus en m ;
t. temps en s.

Mouvement uniformément varié.

Sans vitesse initiale ($v_0 = 0$).
Sans espace initial ($e_0 = 0$).

$\gamma = \text{constante}$ (1)

Vitesse au temps t : $v = \gamma t$ (2)

Espace au temps t : $e = \frac{1}{2}\gamma t^2$ (3)

Eliminer **t** entre *(2)* et *(3)*.

$$v = \sqrt{2\gamma e} \quad (4)$$

Mouvement uniformément varié.

Avec vitesse initiale v_0.
Sans espace initial ($e_0 = 0$).

$\gamma = \text{constante}$ (1)

Vitesse au temps t : $v = v_0 \pm \gamma t$ (5)

Espace au temps t : $e = v_0 t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2$ (6)

Mouvement **acccéléré** : signe **+**.
Mouvement **décéléré** : signe **—**.

Eliminer **t** entre *(5)* et *(6)*.

$$v = \sqrt{v^2_0 \pm 2\gamma e} \quad (7)$$

Mouvement uniformément varié avec vitesse initiale (v_0) **et espace initial** (e_0).

$\gamma = \text{constante}$

Vitesse au temps t : $v = v_0 \pm \gamma t$ (8)

Espace au temps t : $e = e_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2$ (9)

Eliminer **t** entre *(8)* et *(9)*.

$$v = \sqrt{v^2_0 \pm 2\gamma(e - e_0)} \quad (10)$$

Problème. Un trolleybus quitte une station avec une accélération (démarrage) de 1 $m/s/s$. Au bout de combien de temps et après quel parcours atteint-il la vitesse de 36 km/h. A cet instant le conducteur doit freiner brusquement pour immobiliser le véhicule après un trajet de 10 m. Trouver la décélération du véhicule et la durée du freinage.

Solution.

Unités : e (m), t (s), v (m/s), γ ($m/s/s$).

On a 36 km/h = 36 000 (m) : 3 600 (s) = 10 m/s.

Démarrage : Mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale avec $\gamma = 1$ $m/s/s$.

$v = \gamma t$ d'où $t = v : \gamma = 10 : 1 = 10$ s.

$e = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 10^2 = 50$ m.

Freinage : Mouvement uniformément retardé avec vitesse initiale v_0 = 36 km/h = 10 m/s.

A la fin du freinage (arrêt) $v = 0$ et $e = 10$.

$v = \sqrt{v^2_0 - 2\gamma e}$

Soit $0 = \sqrt{10^2 - 2 \times \gamma \times 10}$,
d'où $\gamma = 5$, décélération $\delta = -5$ $m/s/s$.

Durée du freinage :

$v = v_0 + \delta t$, soit $v = v_0 - \gamma t$

$0 = 10 - 5t$

$t = \frac{10}{5} = 2$ s.

M. 9 — MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT VARIÉ

CHUTE DES CORPS (2)

Chute des corps dans le vide.

En un lieu déterminé, tous les corps tombent également vite avec une accélération constante (accélération de la pesanteur).

Cette accélération, désignée par la lettre **g**, vaut à Paris 9,8094 *m/s/s*. Dans les calculs, on prend **g** = 9,81 (et exceptionnellement **g** = 10).

Chute libre.

Le corps est lâché sans vitesse initiale ($v_0 = 0$) et sans espace initial ($e_0 = 0$).

Remplacer, dans les formules (2), (3), (4) de M. 8 :

e par **h** et γ par **g**.

$$\boxed{g = 9{,}81\ m/s/s} \quad (1)$$

$$\boxed{v = gt} \quad (2)$$

$$\boxed{h = \frac{1}{2}\,gt^2} \quad (3)$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}} \quad (4)$$

Corps lancé verticalement vers le bas avec une vitesse initiale v_0.

La vitesse croît :

$$\boxed{g = 9{,}81\ m/s/s}$$

Au temps t $\boxed{v = v_0 + gt}$ (5)

Au temps t $\boxed{h = v_0 t + \frac{1}{2}\,gt^2}$ (6)

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}} \quad (7)$$

Corps lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale v_0.

La vitesse diminue et s'annule. Le sens positif du mouvement est le sens de v_0 (c'est-à-dire de bas en haut).

$$\boxed{g = 9{,}81\ m/s/s}$$

$$\boxed{v = v_0 - gt} \quad (8)$$

$$\boxed{h = v_0 t - \frac{1}{2}\,gt^2} \quad (9)$$

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}} \quad (10)$$

Hauteur maximum atteinte (h_m) lorsque $v = 0$.
La formule (10) donne

$$\boxed{h_m = \frac{v_0^2}{2g}} \quad (11)$$

Durée de la montée (t_m).
Dans la formule (8) prendre $v = 0$.

$$\boxed{t_m = \frac{v_0}{g}} \quad (12)$$

A partir de cet instant, le corps redescend en chute libre. Durée de la descente t_d.

$$h = \frac{1}{2}\,gt_d^2$$

d'où $t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{2g^2}} = \frac{v_0}{g}$.

Vitesse atteinte à la fin de la descente :

$$v_d = gt_d = \frac{gv_0}{g} = v_0.$$

Remarque.

$$t_d = t_m \quad \text{et} \quad v_d = v_0$$

(la résistance de l'air et les frottements sont négligés ici).

Problème. Un projectile sort d'un canon dont le tube est vertical avec une vitesse de 500 *m/s*. On demande :

1. la hauteur atteinte par le projectile ;
2. la durée de la montée.

Solution :

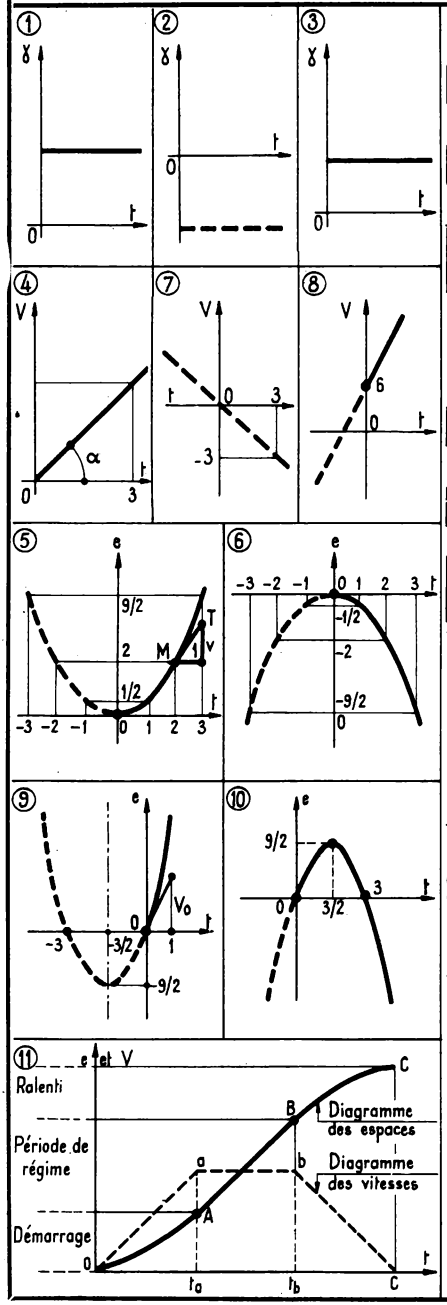
1. $h_m = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{500^2}{2 \times 9{,}81} \simeq 12\,750\ m.$

2. $t_m = \frac{v_0}{g} = \frac{500}{9{,}81} \simeq 51\ s.$

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT VARIÉ

DIAGRAMMES (3)

M. 10



Mouvement sans vitesse initiale.

γ = constante : droite parallèle à l'axe des temps.

$\gamma > 0$ (fig. 1 ou 3) $\gamma < 0$ (fig. 2)

$v = \gamma t$: droite passant par l'origine 0 des axes :

$\gamma > 0$ (fig. 4) $\gamma < 0$ (fig. 7)

$e = \frac{1}{2}\gamma t^2$: parabole dont le sommet se trouve à l'origine 0 des axes :

$\gamma > 0$ (fig. 5) $\gamma < 0$ (fig. 6)

Diagrammes tracés pour $\gamma = 1$ ou -1.

Mouvement avec vitesse initiale.

γ = constante : droite parallèle à l'axe des temps :

$\gamma > 0$ (fig. 1 ou 3) $\gamma < 0$ (fig. 2)

$v = v_0 + \gamma t$: droite qui ne passe pas par l'origine. Exemple $v = 4t + 6$ (fig. 8).

$e = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$: parabole qui passe par l'origine 0 des axes.

$\gamma > 0$ concavité vers le haut (fig. 9).

$\gamma < 0$ concavité vers le bas (fig. 10).

Exemples :

$e = 6t + 2t^2$ (fig. 9).

$e = 6t - 2t^2$ (fig. 10).

Remarques.

— la pente (ou tg α) du diagramme des vitesses est égale à l'accélération γ ou $-\gamma$ (fig. 4).

— la pente de la tangente MT à la parabole des espaces, en un point quelconque M, est égale à la vitesse v du mouvement au temps t correspondant à M (fig. 5 et 9).

Conseils.

Bien préciser les échelles adoptées pour t, γ, v et e.

Exemple.

t	1 *s* sera représentée par 2 *mm*.
v	1 *m/s* sera représenté par 1 *cm*.
e	20 *m* seront représentés par 1 *mm*.

Application : mouvement d'un véhicule (fig. 11). Un véhicule est arrêté, il démarre et prend un mouvement uniformément accéléré (parabole OA), puis un mouvement uniforme (droite AB) ($v_A = v_B$) et enfin un mouvement uniformément décéléré de vitesse initiale $v_0 = v_A$ (ralentissement), (portion de parabole BC), arrêt en C. On a $v_0 = 0$.

M. 11 MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORMÉMENT VARIÉ

(M. C. U. V.)

DÉFINITIONS

Tous les points du corps en mouvement décrivent des cercles ou des arcs de cercle. La vitesse angulaire n'est pas constante : elle augmente (mouvement uniformement accéléré) ou diminue (mouvement uniformément décéléré ou retardé) de quantités égales dans des temps égaux.

Accélération angulaire (ω').

Accroissement constant de la vitesse angulaire (ω) pendant l'unité de temps. Elle s'exprime en radians par seconde, par seconde (*rd/s/s*).

Décélération angulaire ($\beta' = -\omega'$).

Diminution constante de vitesse angulaire pendant l'unité de temps (*rd/s/s*).

Relations et équations.

Les lois du moùvement rectiligne uniformément varié sont applicables au mouvement circulaire. Dans les formules (voir M. 8) on remplace :

— l'espace parcouru **e** (*m*) par l'angle total θ (*rd*) balayé dans le temps **t** (*s*) ;

— la vitesse linéaire **v** (*m/s*) par la vitesse angulaire ω (*rd/s*) ;

— l'accélération linéaire γ (*m/s/s*) par l'accélération angulaire ω' (*rd/s/s*).

Vitesse linéaire (v) ***et vitesse angulaire*** (ω).

$v = \omega \cdot R$.

R. rayon (en *m*) de la circonférence décrite par le point considéré en rotation.

Accélération linéaire (γ) ***et accélération angulaire*** (ω').

$\gamma = \omega' \cdot R$.

Mouvement circulaire uniformément varié, sans vitesse initiale ($\omega_0 = 0$).

$\omega' =$ **constante** ; $\quad \omega = \omega' t$

$\theta = \frac{1}{2}\omega' t^2$; $\quad \omega = \sqrt{2\omega'\theta}$

Mouvement circulaire uniformément varié, avec vitesse initiale ω_0.

$\omega' =$ **constante** ; $\quad \omega = \omega_0 \pm \omega' t$

$\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\omega' t^2$; $\quad \omega = \sqrt{\omega^2_0 \pm 2\omega'\theta}$

Mouvement **accéléré** : signe **+**.
Mouvement **décéléré** : signe **—**.

Mouvement avec angle initial θ_0 **et vitesse initiale** ω_0.

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\omega' t^2.$$

Problème. Un volant tourne en vitesse de régime à n = 180 *tr/mn*. La période de démarrage (mouvement uniformément accéléré) dure t = 40 *s*. Après désaccouplement du moteur qui l'entraîne, le volant tourne encore pendant 1 *mn* 30 *s*.

Calculer :

1. l'accélération angulaire ω' de démarrage ;
2. le nombre de tours N' pendant cette période ;
3. la décélération angulaire β' de ralentissement ;
4. le nombre de tours N pendant cette période jusqu'à l'arrêt.

Solution.

1. $\omega_0 = 0$ donc $\omega = \omega' t$ et $\omega' = \frac{\omega}{t}$

$$\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{180\pi}{30} = 6\pi \ rd/s$$

$$\omega' = \frac{6\pi}{40} \simeq 0{,}471 \ rd/s/s$$

2. $N = \frac{\theta'}{2\pi}$ or $\theta' = \frac{1}{2}\omega' t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{6\pi}{40} \times 40^2$

$$= 120\pi \ (rd)$$

$$N' = \frac{120\pi}{2\pi} = \mathbf{60 \ tours.}$$

3. $\omega = \omega_0 + \beta' t = \omega_0 - \omega' t$ or $\omega_0 = 6\pi \ rd/s$ lorsque $t = 60 + 30 = 90 \ s$ on a $\omega = 0$
d'où $0 = 6\pi - 90\,\omega'$
et $\omega' = \frac{6\pi}{90} = \frac{\pi}{15} \simeq 0{,}21 \ rd/s/s$, d'où $\beta' = 0{,}21 \ rd/s/s$

4. $N = \frac{\theta}{2\pi}$. Or $\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\omega' t^2$

$$= 6\pi \times 90 - \frac{\pi}{30} \times 90^2$$

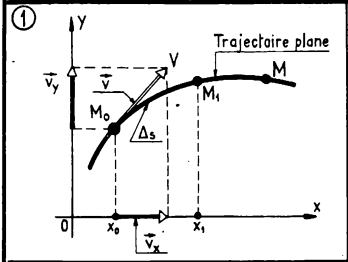
$$= 270\pi \ (rd)$$

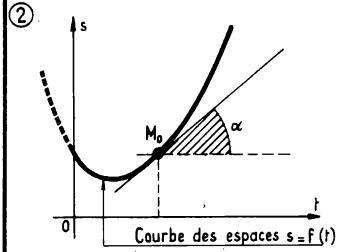
$$N = \frac{270\pi}{2\pi} = \mathbf{135 \ tours.}$$

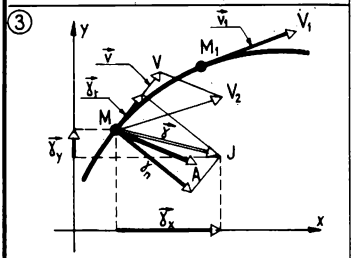
MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

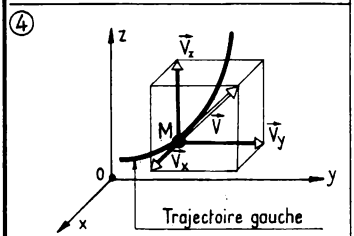
COMPLÉMENTS

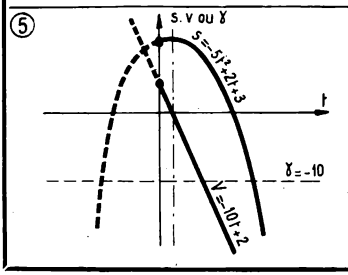
M. 12

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

Loi du mouvement ou équation des espaces

arc $\overset{\frown}{M_0M} = s = f(t)$ **(trajectoire)** (fig. 1).
f(t) = fonction du temps.

Courbe ou diagramme des espaces :
courbe représentative de l'équation s = f(t) dans le système d'axes Ot, Os. Fig. 2.

Vitesse moyenne : $v_m = \dfrac{\text{arc } M_0M_1}{t_1 - t_0} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$
dans l'intervalle de temps Δt.

Vitesse instantanée : si Δt diminue indéfiniment, $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ tend vers la limite $\dfrac{ds}{dt}$.

$$\boxed{ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.} \qquad \boxed{v = \frac{ds}{dt} = f'(t)}$$

La vitesse v du point matériel M à l'instant t est égale à la dérivée par rapport au temps de l'espace s = f(t). Elle est dirigée suivant la tangente à la trajectoire au point M dans le sens du mouvement.

Réciproquement, connaissant $v = f'(t) = \dfrac{ds}{dt}$, on obtient l'équation des espaces en prenant une primitive de la fonction v.

$$s = \int f'(t) \cdot dt = f(t) + \text{constante}.$$

Projections de v (sur ox et oy) (fig. 1).

$\overrightarrow{v_x} = \text{proj}_{ox}\,\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{v_y} = \text{proj}_{oy}\,\overrightarrow{v}$

$v_x = \dfrac{dx}{dt} = x'(t)$; $v_y = \dfrac{dy}{dt} = y'(t)$

$$\boxed{v = \sqrt{v^2_x + v^2_y}} \qquad \boxed{v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$$

x = proj$_{ox}$ s; y = proj$_{oy}$ s (fonctions de t).

Remarque : $\dfrac{ds}{dt} = \text{tg}\,\alpha$ = pente de la tangente au diagramme des espaces au point considéré.

Accélération (fig. 3).

$\overrightarrow{v}$ (ou $\overrightarrow{MV}$) = vitesse au temps t; $\overrightarrow{v_1}$ ou $\overrightarrow{MV_1}$ = vitesse au temps t_1; $\overrightarrow{MV_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MV_1}$; $\overrightarrow{VV_2} = \overrightarrow{MV_2} - \overrightarrow{MV}$

Accélération moyenne de t à t_1 $= \overrightarrow{MA} = \dfrac{\overrightarrow{VV_2}}{t_1 - t} = \dfrac{\Delta(\overrightarrow{MV})}{\Delta t}$

$\overrightarrow{MA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{VV_2}$. Si $t_1 - t = \Delta t$ tend vers 0, $\overrightarrow{MA}$ tend vers une limite $\overrightarrow{MJ}$ ou $\overrightarrow{\gamma}$ = **accélération instantanée** à l'instant t. $\overrightarrow{\gamma} = \dfrac{d(\overrightarrow{MV})}{dt}$ ($\overrightarrow{MJ}$ non $\uparrow\uparrow \overrightarrow{VV_2}$).

Composantes de $\overrightarrow{\gamma}$. $\overrightarrow{\gamma} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\gamma_t} + \overrightarrow{\gamma_n}$ ou $\gamma = \sqrt{\gamma^2_t + \gamma^2_n}$

$\overrightarrow{\gamma_t}$ = **accélération tangentielle.** $\gamma_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$

$\overrightarrow{\gamma_n}$ = **accélération normale.** $\gamma_n = \dfrac{v^2}{R}$

R = rayon de courbure.

Projections de γ sur ox et oy.

$\gamma_x = x''(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\gamma_y = y''(t) = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ $\gamma = \sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$.

Cas d'une trajectoire gauche (fig. 4). $v_z = z'(t)$ $\gamma_z = z''(t)$.

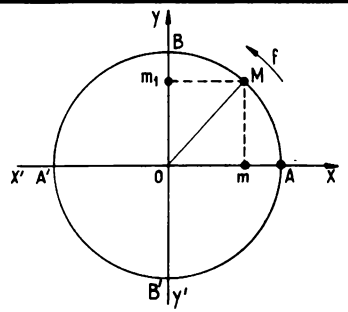
$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$; $v = \sqrt{v^2_x + v^2_y + v^2_z}$; $\gamma = \sqrt{\gamma^2_x + \gamma^2_y + \gamma^2_z}$

Exemple. $s = -5t^2 + 2t + 3$ (fig. 5) (traject. plane).
$v = -10t + 2$; $\gamma = -10$

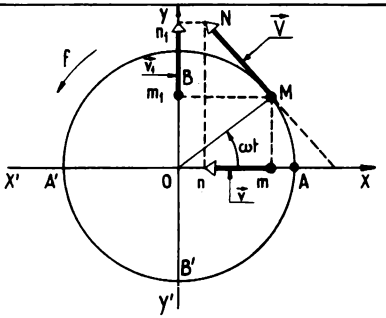
M. 13 — MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOÏDAL (I)

(M. R. S.)

①



②



DÉFINITIONS

Mouvement rectiligne sinusoïdal (fig. 1).

C'est le mouvement du point m (ou m_1) (projection d'un point M sur le diamètre d'un cercle) lorsque ce point M parcourt le cercle d'un mouvement uniforme.

Trajectoire.

A. origine du mouvement de M sur le cercle ;
M décrit le cercle dans le sens f (fig. 1) ;
m décrit le diamètre AA' de A en A', puis de A' en A ;
$\mathbf{m_1}$ décrit le diamètre B'B dans le sens B'B, puis BB'.

***Période* T.**

Temps T mis par M pour parcourir le cercle entier une fois.

T = temps mis par **m** pour parcourir sur le diamètre AA' le chemin AA' + A'A.

T = temps mis par m_1 pour parcourir sur le diamètre B'B le chemin BB' + B'B.

Lois du mouvement.

***Loi des espaces* (équation horaire).**

R. rayon du cercle parcouru par M ;
O. centre du cercle, origine des mouvements de m (et de m_1) sur X'X (et Y'Y) ;
ω. vitesse angulaire de M ;
t. durée du mouvement de M.
A. origine du mouvement de M.

Sur X'X $\boxed{e = \overline{Om} = R \cos \omega t}$ (1)

Sur Y'Y $\boxed{e_1 = \overline{Om_1} = R \sin \omega t}$ (2)

Lois des vitesses (fig. 2).

Sur la tangente au cercle, $\overrightarrow{MN}$ représente la vitesse $\vec{V}$ (constante) de M

$MN = \omega R$.

Vitesse de m. (sur X'X) :

$\vec{v} = \overrightarrow{mn}$ = projection de $\overrightarrow{MN}$ sur X'X

$\overline{mn} = -\overline{MN} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)$.

Vitesse de m_1 (sur Y'Y) :

$\vec{v}_1 = \overrightarrow{m_1n_1}$ = projection de $\overrightarrow{MN}$ sur Y'Y

$\overline{m_1n_1} = \overline{MN} \cos \omega t$, d'où :

Sur XX' $\boxed{v = \overline{mn} = -\omega R \sin \omega t}$ (3)

Sur Y'Y $\boxed{v_1 = \overline{m_1n_1} = \omega R \cos \omega t}$ (4)

Remarque :

$$v = e'(t) = \frac{de}{dt}$$

et $v_1 = e'_1(t) = \frac{de_1}{dt}$. (voir M. 12)

$\frac{d \cos \omega t}{dt} = -\omega \sin \omega t$ et $\frac{d \sin \omega t}{dt} = \omega \cos \omega t$.

Lois des accélérations.

$\gamma = e''(t) = \frac{d^2e}{dt^2}$ et $\gamma_1 = e''_1(t) = \frac{d^2e_1}{dt^2}$

Sur X'X $\boxed{\gamma = -\omega^2 R \cos \omega t}$ (5)

Sur Y'Y $\boxed{\gamma_1 = -\omega^2 R \sin \omega t}$ (6)

Remarques. On appelle :

Amplitude du mouvement :

OA (ou OB) = R.

Fréquence : f ou $\nu = 1/T$ (7). C'est l'inverse de la période T.

On a $\boxed{\omega T = 2\pi}$ (8) et $\boxed{\omega = 2\pi/T = 2\pi f}$ (9)

Elongation, abscisse Om = x (ou ordonnée Om_1 = y) de M (ou de m_1) au temps **t**

Dans les formules *1, 2, 3, 4, 5, 6* on peut remplacer ω par la valeur donnée (formule 9).

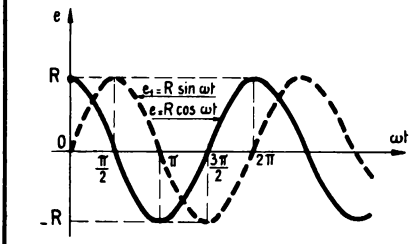
Pulsation. C'est la valeur ω.

On peut aussi remplacer :

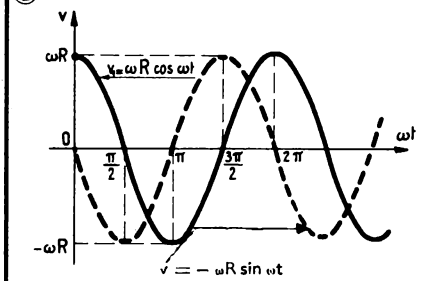
e par **x** ou $\mathbf{e_x}$ | **e_1** par **y** ou $\mathbf{e_y}$ | ⟶ | **v** par $\mathbf{V_x}$ | $\mathbf{v_1}$ par $\mathbf{V_y}$ | γ par γ_x | γ_1 par γ_y

MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOÏDAL (2) — M. 14

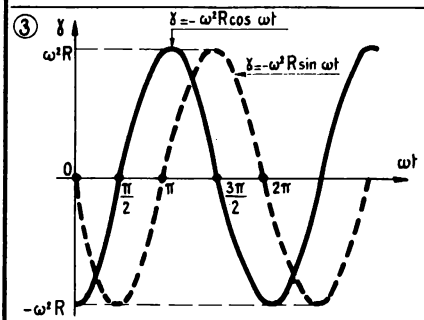
①



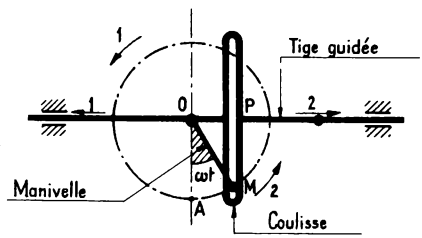
②



③



④



DIAGRAMMES

Diagrammes des espaces.

e_x ou $e = R \cos \omega t$
e_y ou $e_1 = R \sin \omega t$ | sinusoïdes (fig. 1).

Diagrammes des vitesses.

v_x ou $v = -\omega R \sin \omega t$
v_y ou $v_1 = \omega R \cos \omega t$ | sinusoïdes (fig. 2).

Diagrammes des accélérations.

γ_x ou $\gamma = -\omega^2 R \cos \omega t$
γ_y ou $\gamma_1 = -\omega^2 R \sin \omega t$ | sinusoïdes (fig. 3).

Application (fig. 4). Une manivelle à coulisse commande une tige guidée. Le rayon OM = R de la manivelle est R = 10 *cm* et sa vitesse de rotation N = 150 *tr/mn*. Etablir les équations du mouvement d'un point A de la tige et calculer le déplacement x du point P entre les temps $t_1 = \frac{1}{10}$ *s* et $t_2 = \frac{1}{5}$ *s* ainsi que les vitesses et les accélérations aux temps t_1 et t_2. Quelle est la course du point P?

Solution.

Equation horaire des espaces (unités : *cm* et *s*) : $e = R \sin \omega t = 10 \sin \omega t$.

$$\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{150\pi}{30} = 5\pi$$

$$\mathbf{e = 10 \sin 5\pi t}$$

Equation des vitesses :

$v = \omega R \cos \omega t$ $\quad$ $\mathbf{v = 50\pi \cos 5\pi t}$

Equation des accélérations :

$\gamma = -\omega^2 R \sin \omega t$ $\quad$ $\mathbf{\gamma = -250\,\pi^2 \sin 5\pi t}$

Espace parcouru au temps t_1 :

$$e_1 = 10 \sin \left(5\pi \times \frac{1}{10}\right) = 10 \sin \frac{\pi}{2} = 10\ (cm).$$

Espace parcouru au temps t_2 :

$$e_2 = 10 \sin \left(5\pi \times \frac{1}{5}\right) = 10 \sin \pi = 0.$$

Déplacement entre t_1 et t_2 :

$x = e_2 - e_1 = 0 - 10 = -10\ cm.$

Au temps t_1 :

$$v_1 = 50\pi \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\gamma_1 = -250\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} \simeq \mathbf{-2\,467{,}4}\ cm/s/s.$$

Au temps t_2 :

$v_2 = 50\pi \cos \pi \simeq -157\ cm/s$;

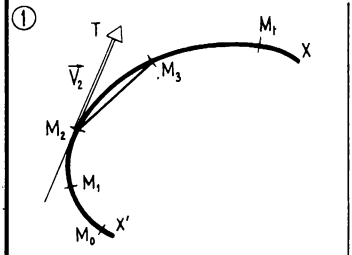
$\gamma_2 = -250^2 \sin \pi = \mathbf{0}$.

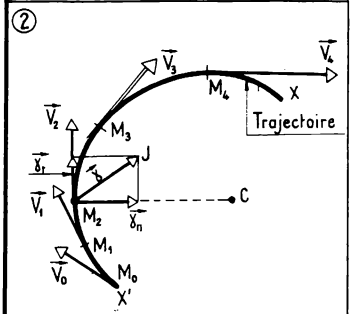
Course de P :

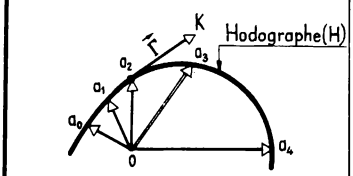
$e_{max} = 10\ cm$; $e_{min} = -10\ cm$.

Course = 10 − (−10) = **20** *cm*.

M. 15 — HODOGRAPHE D'UN MOUVEMENT (I)







VECTEUR VITESSE (Compléments) (fig. 1)

La courbe X'X est la **trajectoire** plane du point mobile M qui occupe les **positions :**

M_0, M_1, M_2, M_3 ... M_t aux **temps :** t_0, t_1, t_2, t_3 ... t.

La ***vitesse moyenne*** entre M_2 et M_3 (ou temps t_2 et t_3), par exemple est :

$$\left| v_m \right|_{t_2}^{t_3} = \frac{\text{corde } M_2M_3}{t_3 - t_2}$$

Si l'intervalle de temps $\Delta t = t_3 - t_2$ diminue et tend vers zéro, M_3 se rapproche indéfiniment de M_2 et la corde M_2M_3 tend vers la tangente M_2T qui porte alors le vecteur vitesse v_{t_2} (ou v_2) à l'instant t_2.

Vitesse instantanée au temps t_2 :

v_{t_2} ou v_2 = limite de $\dfrac{\text{corde } M_2M_3}{t_3 - t_2}$ lorsque t_3 tend vers t_2.

= dérivée de l'espace par rapport au temps.

$$v_t = e'(t) \qquad v_2 = e'(t_2)$$

Règle : au temps t, la vitesse instantanée v_t d'un mobile M peut être représentée par un vecteur d'origine M (position du mobile au temps t), porté par la tangente MT en M à la trajectoire; le sens de ce vecteur est celui du mouvement, son module (ou intensité) est la valeur numérique de la vitesse, à l'instant t, portée à une échelle de représentation que l'on indique; cette valeur numérique est celle que prend la dérivée de l'espace e'(t) pour la valeur considérée de t ($t = t_2$ par exemple).

Hodographe du mouvement (fig. 2).

Courbe (H), lieu du point **a,** obtenue en joignant les extrémités a_0, a_1, a_2, a_3... des vecteurs $\overrightarrow{oa_0}$, $\overrightarrow{oa_1}$, $\overrightarrow{oa_2}$, $\overrightarrow{oa_3}$... tracés à partir d'un même point O quelconque pris dans le plan de la trajectoire et équipollents (voir M. 22) aux vecteurs vitesses $\overrightarrow{v_0}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$... du mouvement aux positions correspondantes M_0, M_1, M_2... du mobile M.

L'hodographe montre comment varie la vitesse du mobile à chaque instant en direction, sens et intensité.

Vecteur accélération (fig. 2).

Le vecteur MJ ou γ du mouvement d'un mobile M, à un instant **t** est équipollent (voir M. 22) au vecteur vitesse $\overrightarrow{aK}$ ou $\overrightarrow{\Gamma}$ (voir Doc. 1) du point **a** sur l'hodographe H du mouvement à l'instant considéré **t.**

Exemple. Au temps t_2, position M_2, le mobile M a pour vitesse $\overrightarrow{M_2V_2}$ ou $\overrightarrow{v_2}$ et pour accélération $\overrightarrow{M_2J}$ vecteur équipollent au vecteur $\overrightarrow{a_2K}$ ou $\overrightarrow{\Gamma}$.

$\vec{\gamma}$ accélération totale du mouvement de M.

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma_t} + \vec{\gamma_n}$$ (voir M. 12)

ou accélération instantanée.

$\vec{\gamma_t}$ accélération tangentielle de M.

Projection de $\vec{\gamma}$ sur la tangente en M à la trajectoire (support de vitesse) (voir M. 12).

$\vec{\gamma_n}$ accélération normale.

Projection de $\vec{\gamma}$ sur la normale à la tangente; $\vec{\gamma_n}$ est dirigée vers le centre de courbure C de la trajectoire au point considéré.

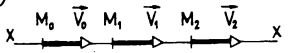
$$\gamma_n = \frac{v^2}{R}$$

R rayon de courbure de la trajectoire au point M.

HODOGRAPHE D'UN MOUVEMENT (2)

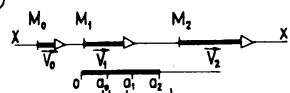
M. 16

① Mouvement



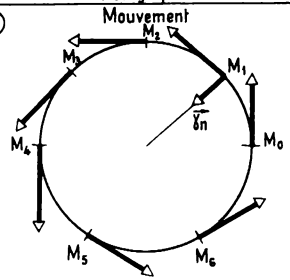
Hodographe

② Mouvement

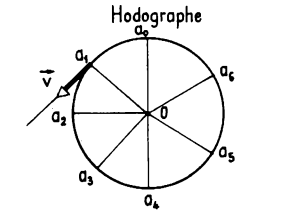


Hodographe

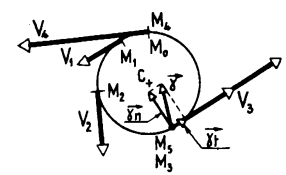
③ Mouvement

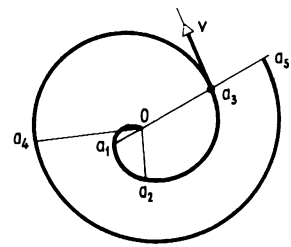


Hodographe



④





EXEMPLES :

Hodographe d'un mouvement rectiligne uniforme (fig. 1).

Vitesse constante en direction sens, intensité :

$$\vec{v} = \text{constante.}$$

L'**hodographe est un point** a (a_0, a_1, a_2 ... confondus)

$$\vec{\gamma} = 0; \quad \gamma_t = 0; \quad \gamma_n = 0$$

Mouvement rectiligne uniformément varié (fig. 2).

L'**hodographe est une droite oa** parallèle à la trajectoire.

La vitesse $\vec{v}$ du point a est portée par cette droite ($oa_1a_2a_3$...).

Le vecteur mené par un point M équipollent à $\vec{v}$ est le vecteur accélération $\vec{\gamma}$, il est porté par la trajectoire.

$$\gamma_t = \gamma \quad \text{et} \quad \gamma_n = 0$$

Mouvement circulaire uniforme (fig. 3).

L'**hodographe est un cercle.**

γ est porté par un rayon de la trajectoire

$$\gamma_t = 0; \quad \gamma_n = \gamma = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2R^2}{R} = \omega^2R$$

Mouvement circulaire uniformément varié (fig. 4).

Equations du mouvement :

$$\theta = \frac{1}{2}\omega' t^2 \qquad \omega = \omega' t$$

Soit par exemple

$$\omega' = \frac{\pi}{4}\ rd/s/s,$$

et R = rayon du cercle = 20 *cm*.

$$\theta = \frac{\pi}{8}t^2 \qquad \omega = \frac{\pi}{4}t.$$

Vitesse linéaire d'un point M.

$$v = \omega R = \frac{\pi}{4}\,Rt = 5\pi t\ cm/s.$$

Tableau des valeurs de θ, ω et v pour les 5 premières secondes.

t	0	1	2	3	4	5
θ	0	$\pi/8$	$\pi/2$	$9\pi/8$	2π	$25\pi/8$
ω	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$
v	0	5π	10π	15π	20π	25π

Echelles du tracé :

— longueurs : 1 *mm* représente 10 *mm* ;

— vitesses : 1 *mm* représente π *cm/s*.

L'hodographe est une spirale.

Remarque : $\gamma_t = 5\pi$ *cm/s/s*, valeur constante.

$$\gamma_n = \omega^2R = \frac{\pi^2}{16}t^2 \times 20 = \frac{5\pi^2}{4}t^2\ cm/s/s.$$

γ_n croît avec le carré du temps.

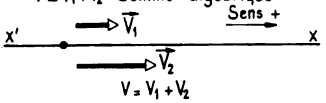
γ_n est appelé accélération centripète.

Remarques : — Lorsque $\gamma_n = 0$, la trajectoire est rectiligne, dans les autres cas elle est curviligne.

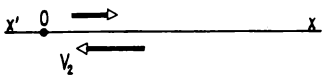
— Lorsque $\gamma_t = 0$, le mouvement est uniforme, il est varié si $\gamma_t \neq 0$.

M. 17 MOUVEMENTS SIMULTANÉS (I)

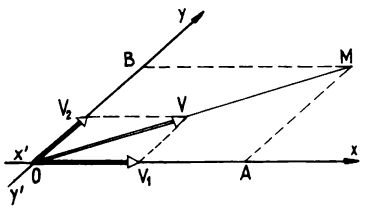
① $V = V_1 + V_2$ Somme algébrique



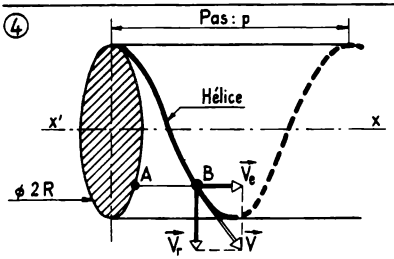
② $V = V_1 - V_2$ Somme algébrique



③ $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$ Somme géométrique ou vectorielle



④



$$\frac{v_e}{v_r} = \frac{p}{2\pi R} = \frac{\text{pas de l'hélice}}{\text{longueur de la circonférence}}$$

$$\frac{v_e}{\omega R} = \frac{p}{2\pi R} \qquad \boxed{v_e = p\,\frac{\omega}{2\pi}}$$

$$v = \sqrt{\omega^2R^2 + p^2\,\frac{\omega^2}{4\pi^2}} = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{4\pi^2R^2 + p^2}$$

Composition de deux mouvements uniformes : l'un de rotation autour d'un axe, l'autre de translation parallèle à cet axe (fig. 4).

Mouvement relatif :
Rotation de vitesse $v_r = \omega R$ d'axe X'X.

Mouvement d'entraînement :
Translation de vitesse v_e paral. à X'X.

Mouvement résultant :
Mouvement ***hélicoïdal*** de vitesse v

$$v = \sqrt{v^2_r + v^2_e} = \sqrt{\omega^2R^2 + v^2_e}$$

DÉFINITIONS

Mouvement relatif :

Mouvement d'un mobile M par rapport à un certain système de repères S, vitesse v_r = **vitesse relative.**

Mouvement d'entraînement :

Mouvement du système S par rapport à un système fixe de repères S_0, vitesse v_e = **vitesse d'entraînement.**

Mouvement résultant ou absolu :

Mouvement du mobile M par rapport au système fixe S_0, vitesse **v ou** v_a = **vitesse résultante ou vitesse absolue.**

Indépendance des mouvements simultanés : Chacun des mouvements relatif et d'entraînement a lieu comme si l'autre n'existait pas. Autrement dit on peut considérer que les deux mouvements se réalisent successivement.

Composition de deux mouvements rectilignes uniformes de même origine :

— **de même direction, même sens** (fig. 1).

$e_1 = v_1t$, $e_2 = v_2t$ | Le mouvement résultant est rectiligne uniforme $v = v_1 + v_2$ | $e = e_1 + e_2$, $e = (v_1 + v_2)t$

— **de même direction, sens contraires** (fig. 2).

$e = e_1 - e_2$ $\quad e = (v_1 - v_2)t$
ou
$e = e_2 - e_1$ $\quad e = (v_2 - v_1)t$
} $e = vt$

Mouvements de directions différentes (fig. 3).

$OA = e_1 = v_1t$.
$OB = e_2 = v_2t$.
$OM = e = vt$.

Relations entre les vitesses v, v_1 et v_2 :

— **relation géométrique.** $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$.

— **relation algébrique.**

$$\boxed{v = \sqrt{v^2_1 + v^2_2 + 2v_1v_2\cos(v_1, v_2)}}$$

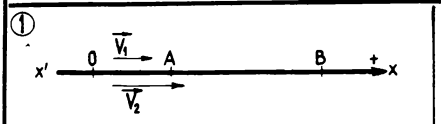
— **relation graphique.**

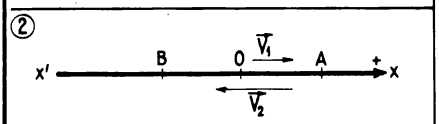
v est la diagonale du parallélogramme construit sur v_1 et v_2.
Le mouvement résultant est rectiligne uniforme.

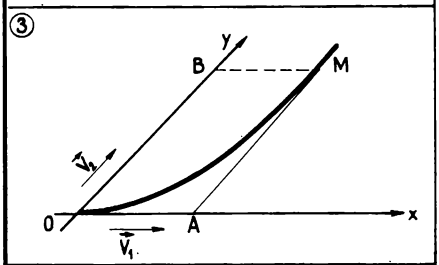
Cas particulier. Les mouvements sont rectangulaires : $\cos(v_1, v_2) = 0$.

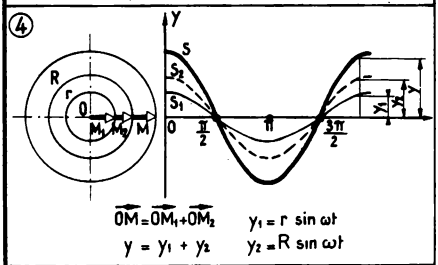
$$\boxed{v = \sqrt{v^2_1 + v^2_2}}$$

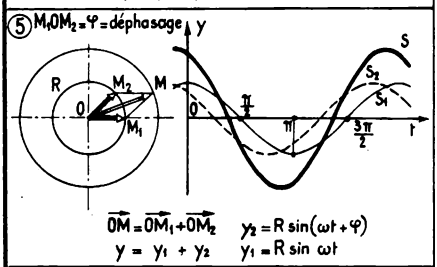
MOUVEMENTS SIMULTANÉS (2) — M. 18

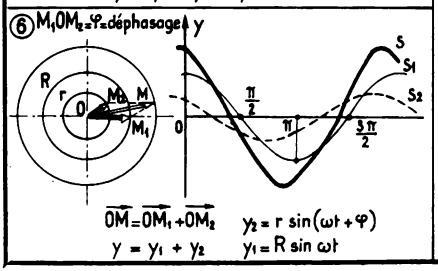












Composition d'un mouvement rectiligne uniforme et d'un mouvement rectiligne uniformément varié, même origine :

Mouvements de même direction :

— **de même sens** (fig. 1).

v_1 = constante.

$v_2 = \gamma t$.

Tout se passe comme si les mouvements se produisaient successivement :

$OA = e_1 = v_1 t$.

$AB = e_2 = \frac{1}{2}\gamma t^2$.

$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$.

$e = e_1 + e_2 = v_1 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$.

— **de sens contraires** (fig. 2).

$AB = -\frac{1}{2}\gamma t^2$.

$e = e_1 + e_2 = v_1 t - \frac{1}{2}\gamma t^2$.

Dans les deux cas, le mouvement résultant est rectiligne uniformément varié.

Mouvements de direction différentes (fig. 3).

$OA = e_1 = v_1 t$.

$OB = e_2 = \frac{1}{2}\gamma t^2$.

$\overrightarrow{AM}$ équipollent à $\overrightarrow{OB}$.

$$t = \frac{e_1}{v_1} \qquad \text{d'où}$$

$$e_2 = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{e_1}{v_1}\right)^2 = \frac{\gamma}{2v_1^2} \cdot e_1^2$$

soit $$AM = \frac{\gamma}{2v_1^2} \cdot OA^2.$$

Le **mouvement résultant est parabolique**, la trajectoire de M est une parabole.

Composition de deux mouvements rectilignes sinusoïdaux (voir M. 13) :

— **d'amplitudes différentes, de même période, en phase** (M_1 et M_2 sont sur le même diamètre) (fig. 4).

$OM = OM_2 + OM_1$.

$y = y_1 + y_2$ ou $e = e_1 + e_2$ (espaces).

— **de même amplitude, même période mais déphasés** (M_1 et M_2 sont décalés sur le même cercle) (fig. 5).

OM diagonale du parallélogramme OM_1MM_2.

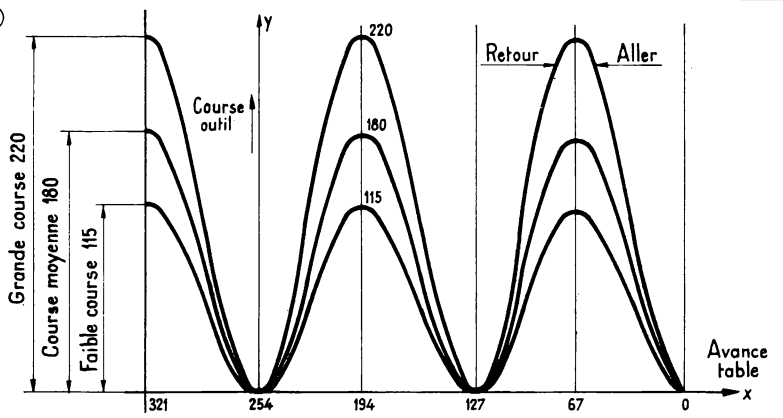
— **de même période, déphasés et d'amplitudes différentes** (fig. 6).

Dans ces trois cas le mouvement résultant a même période que les mouvements composants. Son amplitude est la somme des amplitudes.

M. 19 — MOUVEMENTS SIMULTANÉS (3)

COMPLÉMENTS

①



MÉTHODE GÉNÉRALE D'ÉTUDE

Deux mouvements **simultanés,** pour un **même point,** dans un **même plan** et de **directions perpendiculaires,** sont fonctions du temps.

Premier mouvement : direction x'x ; équation : $x = f(t)$ (1).

Deuxième mouvement : direction y'y ; équation : $y = g(t)$ (2).

$y'y \perp x'x$

L'élimination de la variable **t** entre les équations (1) et (2) donne l'équation de la **trajectoire** dans le système d'axes ox et oy.

Equation $y = F(x)$ (3).

Vitesse et accélération (voir M. 12).

Exemple : Soit $x = 4t^2 - 5$ (1) et $y = 3t^2 + 1$ (2).

(1) donne

$$t^2 = \frac{x+5}{4} \quad \text{d'où} \quad y = \frac{3(x+5)}{4} + 1.$$

Soit $4y = 3x + 19$ (3) ou $y = \frac{3x+19}{4}$,

équation de la trajectoire dans le système d'axes rectangulaires Ox, Oy.

On a l'équation d'une droite (la trajectoire est une droite).

Vitesse suivant x'x :

$$v_x = x'(t) = f'(t) = 8t.$$

Vitesse suivant y'y :

$$v_y = y'(t) = g'(t) = 6t.$$

Vitesse résultante :

$$\vec{v} = \vec{v_x} + \vec{v_y} \text{ soit } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$= \sqrt{64t^2 + 36t^2} = 10t.$$

Accélération suivant x'x :

$$\gamma_x = x''(t) = f''(t) = 8$$

Accélération suivant y'y :

$$\gamma_y = y''(t) = g''(t) = 6.$$

Accélération résultante $\vec{\gamma} = \vec{\gamma_x} + \vec{\gamma_y}$

soit $\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$

PREMIER EXEMPLE

Enregistrement sur un étau-limeur du mouvement résultant de deux mouvements simultanés.

L'outil est remplacé par un crayon. Une planchette, portant une feuille de papier millimétré, glisse sur la table de l'étau-limeur. L'outil et la planchette sont commandés par le même arbre (système simple approprié pour la planchette).

Le montage élimine **t.**

Le mouvement résultant possède l'une des trajectoires de la figure 1.

Courses de l'outil :

220, 180 et 115 *mm.*

Déplacement de la tablette :

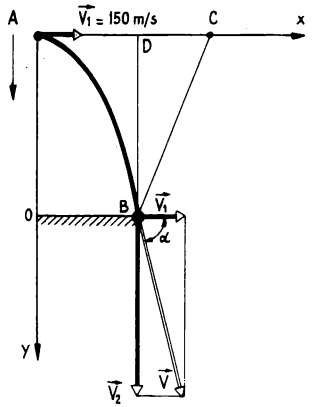
— 67 *mm* pendant la course aller de de l'outil.

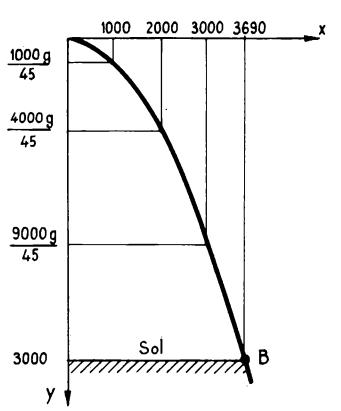
— 60 *mm* pendant la course retour de l'outil (retour rapide).

MOUVEMENTS SIMULTANÉS (4)

COMPLÉMENTS

M. 20

① 

② 

DEUXIÈME EXEMPLE

Lâcher d'un corps dans le vide avec une vitesse initiale non verticale.

Problème (fig. 1). Un avion vole à 3 000 *m* d'altitude à la vitesse de 540 *km/h*. Du point A il lâche une bombe.

1. Au bout de combien de temps la bombe atteindra-t-elle le sol? (point B).

2. Quelle sera sa vitesse en arrivant au sol?

3. Où se trouve l'avion (dont le vol est toujours horizontal, sans changement de cap, ni de vitesse) lorsque le pilote entend le bruit de l'explosion (pointe) (vitesse du son = 340 *m/s*). Quel est le temps écoulé depuis le largage de la bombe?

4. Construire la trajectoire de la bombe.

Solution.

1re question : Mouvements de la bombe :

— Mouvement rectiligne uniforme horizontal :
Vitesse v_1 = 540 *km/h*
soit 540 000 : 3 600 = 150 *m/s*.

— Mouvement rectiligne vertical uniformément accéléré :
Vitesse $v_2 = gt$.

Mouvement résultant : la trajectoire est parabolique (voir M. 18).

Temps mis pour tomber de 3 000 *m* :

$$3\,000 = \frac{1}{2} gt^2.$$

$$t = \sqrt{\frac{6\,000}{g}} \simeq \mathbf{24{,}7}\ s.$$

2e question. Vitesse à l'arrivée au sol :

$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ soit $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

$\vec{v}$ est tangente à la trajectoire en B.

$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{6\,000g} \simeq 242{,}6\ m/s$.

Par suite

$v = \sqrt{150^2 + (6\,000 \times 9{,}81)} \simeq 285\ m/s$.

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_2}{v_1} \simeq \dfrac{242{,}6}{150} \simeq 1{,}617$

$\alpha = \mathbf{58°16'}$.

3e question. L'avion est en C au bout d'un temps t' après l'explosion. Au moment de l'explosion il est en D à la verticale de B.

DC = $v_1 t'$ = 150t'.

Espace parcouru par le son : BC = 340t'

$BC^2 = BD^2 + DC^2$

$(340t')^2 = 3\,000^2 + (150t')^2$

soit $931t'^2 = 90\,000$ d'où t' = 9,8 *s*

soit 24,7 + 9,8 = **34,5** *s* après avoir largué la bombe.

Equation de la trajectoire.

$$\left.\begin{aligned} x &= 150\ t \\ y &= \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned}\right\} \text{ soit } y = \frac{g}{45\,000} x^2 \text{ (voir M. 19)}$$

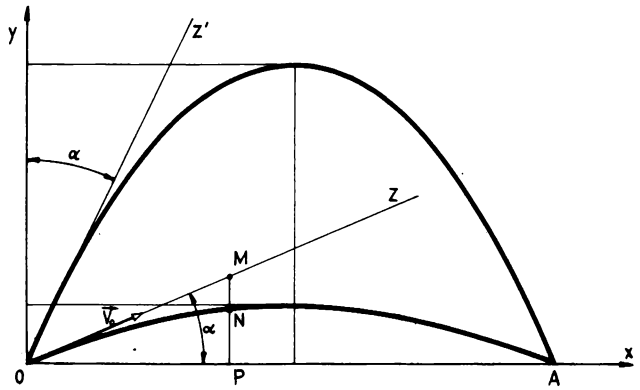
Pour y = 3 000, on a x = OB = 3 690 *m*.

Construction de la trajectoire (fig. 2).

x	0	1 000	2 000	3 000	3 690
y	0	$\frac{1\,000\ g}{45}$	$\frac{4\,000\ g}{45}$	$\frac{9\,000\ g}{45}$	3 000

M. 21 MOUVEMENTS DES PROJECTILES

①



Problème.

Un projectile est lancé avec une vitesse $\vec{v_0}$ donnée en grandeur et direction.

Etudier les particularités du mouvement en négligeant la résistance de l'air.

Soient : ox une horizontale et oy une verticale situées dans le plan vertical contenant OZ, axe du tube de lancement (fig. 1).

v_0 vitesse initiale à la sortie de l'arme ; α = inclinaison de l'axe du tube.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant +\frac{\pi}{2}.$$

S'il n'était pas soumis à la pesanteur, le projectile aurait un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0 et de direction OZ.

La pesanteur lui communique un mouvement vertical de haut en bas d'accélération **g**.

Au bout du temps t :

Mouvement rectiligne uniforme :

$\overline{OM} = v_0 t.$

$\overline{OP} = x = v_0 t \cos\alpha$ (1)

Mouvement de chute :

$$MN = -\frac{1}{2} gt^2 \quad (2)$$

Équation de la trajectoire.

Eliminer t entre les équations (1) et (2) (voir M. 19).

$x = v_0 t \cos\alpha$

$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2.$

On trouve $\boxed{y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.}$

La trajectoire est une **parabole** passant par O.

Portée du projectile.

OA = distance horizontale du point de lancement au point d'impact (au sol).

$y = 0$ donc

$$x\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right) = 0$$

soit $x = 0$ (départ) et $2v_0^2 \cos^2\alpha \operatorname{tg}\alpha - gx = 0$, $2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha = gx$ ou $v_0^2 \sin 2\alpha = gx$.

$$\boxed{x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.}$$

Portée maximum.

Pour $\sin 2\alpha = 1$, $2\alpha = 90°$, $\alpha = 45°$.

$$\boxed{x_{max} = \frac{v_0^2}{g}.}$$

Si l'on remplace α par $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ou 2α par $\pi - 2\alpha$, la portée reste la même ; en effet, $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha)$.

Il y a donc deux trajectoires possibles, déterminées par deux angles de tir complémentaires pour atteindre un même point A.

Hauteur atteinte par le projectile : Correspond à la valeur de x qui annule la dérivée y'(x) de y,

soit $x = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$

On trouve $\boxed{y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$

y_{max} ou h_{max} si $\sin\alpha = 1$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Pour tube vertical $y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

Exemple : Pour $v_0 = 700$ *m/s* et $\alpha = 45°$, OA = **24 500** *m* et h ou y ≃ **12 250** *m*.

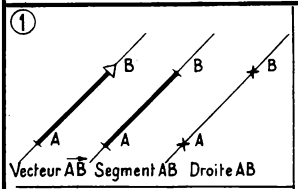
II

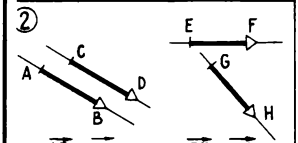
STATIQUE

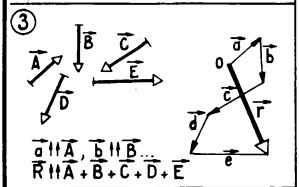
PRINCIPES GÉNÉRAUX
ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE
CONTACTS ET APPUIS
COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES
FUNICULAIRE
MOMENT ALGÉBRIQUE DES FORCES
COUPLES
CENTRE DE GRAVITÉ
CONDITIONS ANALYTIQUES DE L'ÉQUILIBRE

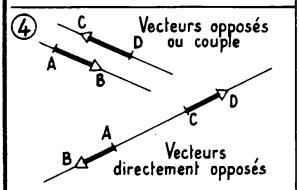
PROPRIÉTÉS DES VECTEURS

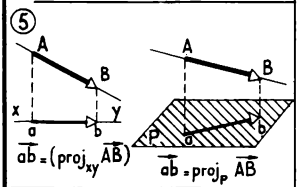
M. 22

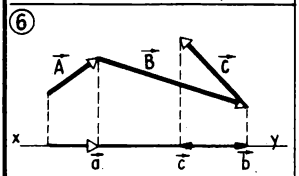


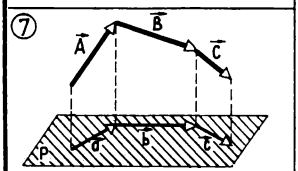












CARACTÉRISTIQUES DES GRANDEURS EN MECANIQUE

Grandeur scalaire : Grandeur qui peut être mesurée par un nombre.

Exemple : prix d'un lot de fers profilés.

Grandeur vectorielle : Grandeur ayant une direction, un sens et une intensité.

Exemple : vitesse d'une locomotive.

Une telle grandeur est représentée par un vecteur : figure géométrique formée par un segment de droite munie d'un sens (fig. 1).

Un vecteur est déterminé lorsqu'on connaît :

1. **Son origine** (A).
2. **Sa direction** (droite AB).
3. **Son sens.**
4. **Son intensité** ou module

(longueur de AB à une échelle déterminée).

Désignation : $\overrightarrow{AB}$ ou $\vec{A}$ ou $\vec{V}$ ou $\overrightarrow{ab}$ ou $\vec{a}$ ou $\vec{v}$.

Vecteurs équipollents (fig. 2).

Ont même direction, même sens, même module $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. 2 vecteurs équipollents sont égaux, mais 2 vecteurs égaux ne sont pas forcément équipollents.

Somme géométrique de vecteurs (fig. 3).

Par O, origine quelconque, on mène $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{A}$, par l'extrémité de $\vec{a}$ on mène $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{B}$, par l'extrémité de $\vec{b}$ on mène $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{C}$, etc. Le vecteur d'origine O (et dont l'extrémité est celle du dernier vecteur) est la somme géométrique des vecteurs donnés. On l'écrit :

$$\vec{r} \uparrow\uparrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} \text{ ou } \vec{R} \uparrow\uparrow \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$$

Vecteur neutre (fig. 4).

Si le polygone des vecteurs est fermé, la somme géométrique des vecteurs est le vecteur neutre ; son module est zéro. On l'écrit :

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} \uparrow\uparrow \vec{0}$$

Cas particulier : somme géométrique de 2 vecteurs opposés.

Propriétés des sommes géométriques de vecteurs.

— La somme géométrique de plusieurs vecteurs est indépendante de leur ordre.

— La somme géométrique de plusieurs vecteurs ne change pas si l'on remplace plusieurs de ces vecteurs par leur somme géométrique.

Projection d'un vecteur sur une droite ou sur un plan.

C'est le vecteur qui a pour origine la projection de l'origine et pour extrémité la projection de l'extrémité du vecteur donné sur une droite ou sur un plan (fig. 5).

La projection sur une droite (fig. 6) ou sur un plan (fig. 7) de la somme géométrique de plusieurs vecteurs est équipollente à la somme géométrique des projections de ces vecteurs sur la droite ou sur le plan :

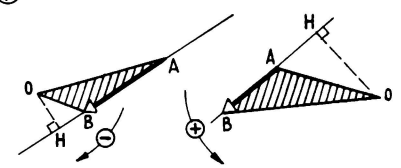
$$\overrightarrow{\text{proj}_{xy}}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \uparrow\uparrow (\overrightarrow{\text{proj}_{xy}}\vec{A}) + (\overrightarrow{\text{proj}_{xy}}\vec{B}) + (\overrightarrow{\text{proj}_{xy}}\vec{C})$$

$$\overrightarrow{\text{proj}_{P}}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \uparrow\uparrow (\overrightarrow{\text{proj}_{P}}\vec{A}) + (\overrightarrow{\text{proj}_{P}}\vec{B}) + (\overrightarrow{\text{proj}_{P}}\vec{C})$$

La projection d'un vecteur est un point si xy ou P sont perpendiculaires à la direction du vecteur.

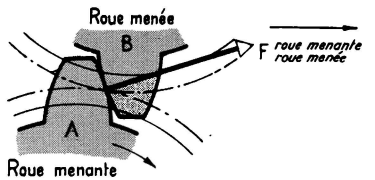
M. 23 — PRINCIPES GÉNÉRAUX (I)

STATIQUE

① 

$\mathcal{M}_{alg}(O,\overrightarrow{AB}) = -(OH.AB)$ $\mathcal{M}_{alg}(O,\overrightarrow{AB}) = +(OH.AB)$

$= -2$ aire OAB $= +2$ aire OAB

② 

MOMENT ALGÉBRIQUE D'UN VECTEUR **par rapport à un point** (fig. 1).

Le point O et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont dans le même plan. OH est la distance de O à la ligne d'action de $\overrightarrow{AB}$. Un sens de rotation (autour de O) est choisi par convention :

(+) sens trigonométrique (ou sens inverse de celui des aiguilles d'une montre) ;

(—) sens des aiguilles d'une montre.

Le moment de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à O est le nombre algébrique $\pm$ mod. $\overrightarrow{AB} \times OH$.

On l'écrit :

$$\mathcal{M}_{alg}(O, \overrightarrow{AB}) = \pm OH \cdot AB = \pm 2 \text{ fois aire OAB.}$$

ACTION MÉCANIQUE

Lorsque deux corps sont en contact, l'un d'eux exerce une action mécanique sur l'autre.

Exemples :

— *Action exercée par une roue de camion sur le sol ;*

— *Action exercée par la vapeur sur une aube de turbine ;*

— *Action exercée par une came sur un galet.*

Cette action mécanique peut entraîner une déformation, un changement de direction dans le déplacement, le maintien au repos, etc.

C'est une **action de contact.**

Lorsque deux corps ne sont pas en contact, l'un d'eux peut exercer une action mécanique sur l'autre.

Exemples :

Un aimant attire un morceau de fer ;

La Terre exerce une attraction sur tous les corps.

C'est une **action à distance.**

Conséquences. Les actions mécaniques exercées **par un corps sur un autre corps** créent des modifications de son état extérieur : variations de forme du corps sur lequel s'exerce l'action, variations des états de mouvement.

Un corps isolé dans l'espace, donc soustrait à toute action mécanique, conserverait sa forme et son état de mouvement (un tel corps n'existe pas).

Recherche des actions mécaniques exercées sur un corps.

1. ***Actions à distance.*** Rechercher par quoi le corps peut être attiré ou repoussé (action d'attraction terrestre, actions magnétiques, actions électriques).

2. ***Actions de contact.*** Rechercher tout ce qui touche le corps (contacts aux appuis, poussés dues au vent, à l'eau, à la vapeur).

Force.

C'est l'action mécanique exercée par un point matériel sur un autre point matériel.

Si la force est une action de contact, le contact est par suite ponctuel.

Exemple : L'action de contact d'une dent d'engrenage sur la dent du pignon mené sera supposée ponctuelle. La poussée qui agit au point de contact s'écrit :

$\overrightarrow{F}_{\substack{\text{roue menante}\\ \text{roue menée}}}$ (fig. 2)

La force de contact d'un corps A sur un corps B est dirigée vers la matière du corps B (fig. 2).

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ DES FORCES

Principe de l'action et de la réaction.

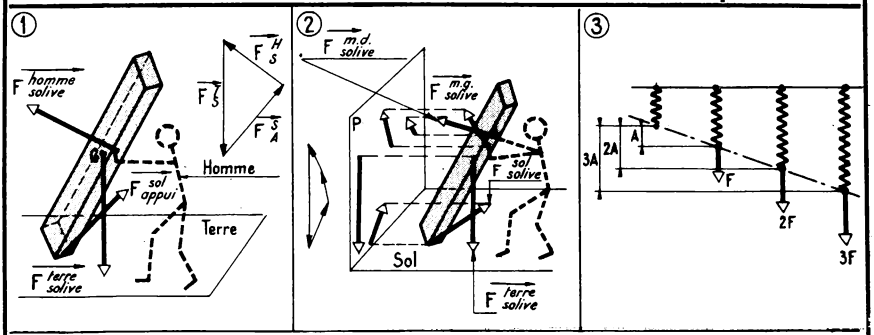
Si un corps A exerce une force sur un corps B, le corps B exerce sur le corps A une force directement opposée à la première. L'une de ces forces est l'**action,** l'autre la **réaction.** Ces 2 forces appartiennent à 2 corps différents.

$\overrightarrow{F}_{\substack{\text{roue menante}\\ \text{roue menée}}} + \overrightarrow{F}_{\substack{\text{roue menée}\\ \text{roue menante}}} \uparrow\uparrow \vec{0}$ (fig. 2)

PRINCIPES GÉNÉRAUX (2)

STATIQUE

M. 24



DEUXIÈME PROPRIÉTÉ DES FORCES

Cas d'un corps en équilibre

Solution graphique

Lorsqu'un corps (solide ou déformable est en équilibre, la somme géométrique de toutes les forces extérieures exercées sur ce corps est le vecteur neutre (fig. 1).

$$\overrightarrow{F_{solive}^{terre}} + \overrightarrow{F_{appui}^{sol}} + \overrightarrow{F_{solive}^{homme}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

Il est souvent plus commode de considérer les projections des forces sur un plan ou sur une droite et d'appliquer la propriété suivante :

Lorsqu'un corps (solide ou déformable) est en équilibre, la somme géométrique des projections sur un plan ou sur une droite de toutes les forces extérieures exercées sur le corps est le vecteur neutre.

Fig. 2. Cas où l'homme retient la solive avec les deux mains.

On projette sur un plan P perpendiculaire au sol ou sur un plan de symétrie.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{proj_P}\ \overrightarrow{F_s^t} + \overrightarrow{proj_P}\ \overrightarrow{F_a^s} \\ + \overrightarrow{proj_P}\ \overrightarrow{F_s^{m.d}} + proj_P\ F_s^{m.g} \end{array}\right\} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

m.g : main gauche.
m.d : main droite.

TROISIÈME PROPRIÉTÉ DES FORCES

Cas d'un corps en équilibre *(Calcul)*

Lorsqu'un corps (solide ou déformable) est en équilibre, la somme algébrique des moments algébriques (par rapport à un point quelconque d'un plan P quelconque des projections sur ce plan P des forces extérieures exercées sur le corps) est nulle.

Dans la figure 1 prendre pour P le plan de symétrie de la solive et pour point de ce plan le point A appui (supposé ponctuel) de la solive sur le sol. On obtient :

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{M}_{alg}\left(A, \overrightarrow{proj_P}\ \overrightarrow{F_{solive}^{terre}}\right) \\ + \mathfrak{M}_{alg}\left(A, \overrightarrow{proj_P}\ \overrightarrow{F_{appui}^{sol}}\right) \\ + \mathfrak{M}_{alg}\left(A, \overrightarrow{proj_P}\ \overrightarrow{F_{solive}^{homme}}\right) \end{array}\right\} = 0$$

Unité d'intensité d'une force.

Une force est une grandeur mesurable.

Pour comparer les forces, on compare leurs effets de déformation élastique sur un ressort étalonné appelé dynamomètre.

En période de déformation élastique; l'allongement d'un ressort est proportionnel à la force qui agit sur lui (fig. 3).

$$A = k \cdot F.$$

A = allongement.
k = constante du ressort.
F = intensité de la force.

La force utilisée pour l'étalonnage est le poids d'un solide déterminé, c'est-à-dire l'action à distance exercée par la terre sur ce solide : c'est l'ensemble des actions à distance des différents points de la terre sur les différents points du solide. Cet ensemble de forces est assimilé à une seule force appelée **poids du solide**; son point d'application est le centre de gravité du solide, direction verticale, sens vers le bas.

Le solide-étalon est un cylindre en platine iridié, déposé au pavillon de Breteuil, à Sèvres (près Paris).

C'est le kilogramme-étalon.

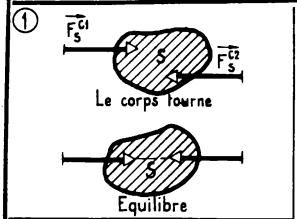
Son poids à Paris est le **kilogramme-poids** (*kgp*) ou **kilogramme-force** (*kgf*).

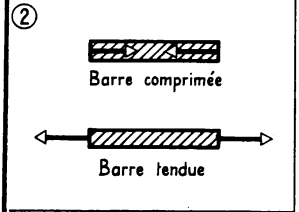
Unité de moment de force.

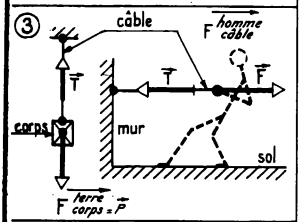
C'est le moment algébrique d'une force-unité par rapport à un point tel que le bras de levier ait une longueur-unité (*m* ou *cm*).

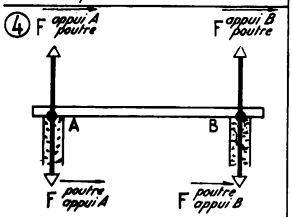
Unité de moment : 1 *m.kgf* ou 1 *cm.kgf*.

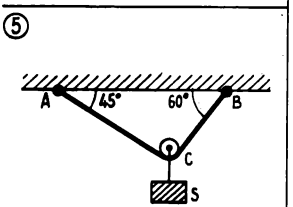
M. 25 ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE (I)

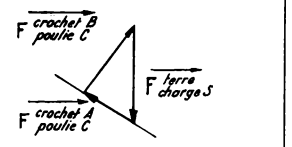












ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE SOUS L'ACTION DE DEUX FORCES

Théorème : Lorsqu'un corps solide est en équilibre sous l'action de deux forces, celles-ci sont directement opposées.

Si les lignes d'action des forces sont parallèles et si l'on a $\overrightarrow{F_S^{C_1}} \uparrow\uparrow - \overrightarrow{F_S^{C_2}}$, le corps tourne (fig. 1).

Si les lignes d'action sont confondues et si $\overrightarrow{F_S^{C_1}} \uparrow\uparrow - \overrightarrow{F_S^{C_2}}$ le corps est en équilibre.

La barre est comprimée si les forces sont dirigées l'une vers l'autre ; dans le cas contraire elle est tendue (fig. 2).

Conséquences.

1° ***Tension d'un câble.***

Le câble auquel est fixé un corps prend une direction verticale $\overrightarrow{T} \uparrow\uparrow - \overrightarrow{P}$ (fig. 3).

L'action de l'homme sur le câble est horizontale.

$$\overrightarrow{T} \uparrow\uparrow - \overrightarrow{F} \quad \text{(fig. 3).}$$

2° ***Réaction des appuis*** (fig. 4).

$\overrightarrow{F^{\text{appui A}}_{\text{poutre}}} \uparrow\uparrow - \overrightarrow{F^{\text{poutre}}_{\text{appui A}}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{R_A}$ réaction de l'appui A action de contact en A

$\overrightarrow{F^{\text{appui B}}_{\text{poutre}}} \uparrow\uparrow - \overrightarrow{F^{\text{poutre}}_{\text{appui B}}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{R_B}$ réaction de l'appui B. action de contact en B.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOUS L'ACTION DE TROIS FORCES

Théorème : Lorsqu'un corps solide est en équilibre sous l'action de trois forces extérieures :

1° Ces forces sont dans le même plan.

2° Ces forces sont concourantes ou parallèles.

3° La somme géométrique des trois forces est le vecteur neutre.

Application (fig. 5). Une charge pesant 400 *kgp* est suspendue à une poutre AB au moyen d'un câble dont les brins font 45° et 60° avec AB. Déterminer les tensions dans les brins du câble.

Solution : Le corps est en équilibre sous l'action de trois forces :

$\overrightarrow{F^{\text{terre}}_{\text{charge}}}$ Appliquée au centre C de la poulie, direction verticale orientée vers le bas, intensité 400 *kgp*.

$\overrightarrow{F^{\text{crochet A}}_{\text{poulie C}}}$ Point d'application : contact du brin et de la poulie ; direction : 45° avec AB ; sens : vers le haut ; intensité inconnue.

$\overrightarrow{F^{\text{crochet B}}_{\text{poulie C}}}$ Point d'application : contacts du brin et de la poulie ; direction : 60° avec AB ; sens : vers le haut ; intensité inconnue.

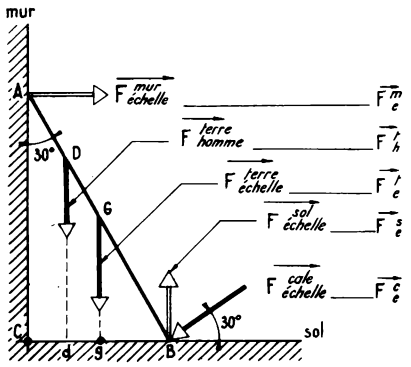
Equilibre, donc les brins AC, CB et CS ont des directions concourantes (ici ils ne peuvent être parallèles), ils sont dans le même plan (ici plan vertical) ; leur somme géométrique est le vecteur neutre.

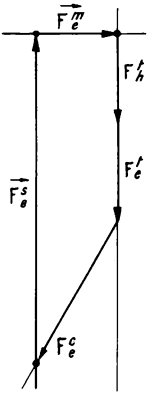
$$\overrightarrow{F^{\text{terre}}_{\text{charge}}} + \overrightarrow{F^{\text{crochet A}}_{\text{poulie C}}} + \overrightarrow{F^{\text{crochet B}}_{\text{poulie C}}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

On construit le polygone des forces en prenant une échelle de représentation des forces (par exemple 1 *cm* représente 100 *kgp*). On mesure les intensités ; on obtient :

$$F^{\text{crochet A}}_{\text{poulie C}} = 210 \text{ kgf} \qquad F^{\text{crochet B}}_{\text{poulie C}} 290 \text{ kgf.}$$

ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE (2) | M. 26

① 

② 

ÉQUILIBRE SOUS L'ACTION DE PLUSIEURS FORCES

1. La somme géométrique des forces est le vecteur neutre ;

2. Projeter les forces sur un plan P tel qu'elles soient en vraie grandeur ;

3. Prendre les moments algébriques des forces par rapport à un point du plan P (choisir ce point de façon que les calculs soient aussi simples que possible).

Application. Une échelle appuyée sur un mur vertical parfaitement lisse fait avec celui-ci un angle de 30°. Le plancher horizontal est aussi parfaitement lisse. Une cale empêche l'échelle de glisser ; son action peut être ramenée à une force perpendiculaire aux montants. La longueur de l'échelle est 5 *m* ; son poids 25 *kgp* appliqué en son milieu. Un homme pesant 75 *kgp* repose sur un barreau situé aux 3/4 de la longueur à partir du sol.

Déterminer les actions de contact aux appuis et l'action que doit exercer la cale pour qu'il n'y ait pas glissement de l'échelle sur le plancher.

Solution.

Le plan P est le plan de symétrie de l'échelle. L'ensemble échelle-homme est soumis à l'action de 5 forces extérieures :

$\overrightarrow{F_{\text{échelle}}^{\text{terre}}}$ appliquée en G, verticale, vers le bas, intensité 25 *kgp*.

$\overrightarrow{F_{\text{homme}}^{\text{terre}}}$ appliquée en D, verticale, vers le bas, intensité 75 *kgp*.

$\overrightarrow{F_{\text{échelle}}^{\text{cale}}}$ appliquée en B, perpendiculaire à AB, vers la gauche, intensité inconnue.

$\overrightarrow{F_{\text{échelle}}^{\text{sol}}}$ appliquée en B, verticale, vers le haut, intensité inconnue.

$\overrightarrow{F_{\text{échelle}}^{\text{mur}}}$ appliquée en A, horizontale, vers la droite, intensité inconnue.

Le polygone des forces est fermé, mais on ne peut pas le construire, il y a 3 inconnues.

Les projections des forces sur le plan de symétrie sont en vraie grandeur, prendre les moments algébriques des forces par rapport au point B.

$$\mathcal{M}_{alg}\left(B, \overrightarrow{F_e^t}\right) + \mathcal{M}_{alg}\left(B, \overrightarrow{F_h^t}\right) + \mathcal{M}_{alg}\left(B, \overrightarrow{F_e^c}\right) + \mathcal{M}_{alg}\left(B, \overrightarrow{F_e^s}\right) + \mathcal{M}_{alg}\left(B, \overrightarrow{F_e^m}\right) = 0.$$

Soit $+ gB \cdot F_e^t + dB \cdot F_h^t + 0 + 0 - CA \cdot F_e^m = 0$

$$1{,}25 \times 25 + 1{,}875 \times 75 - 2{,}5\sqrt{3} \times F_e^m = 0$$

Et $$F_e^m = \frac{1{,}25 \times 25 + 1{,}875 \times 75}{2{,}5\sqrt{3}} \simeq 39{,}7 \text{ kgf}.$$

L'égalité ci-dessus donnerait le sens de F_e^m si on ne le connaissait déjà. On peut maintenant construire le polygone des forces (qui doit être fermé) (fig. 2).

On trouve

$$F_e^s = \mathbf{123} \text{ kgf} \qquad \text{et} \qquad F_e^c = \mathbf{46} \text{ kgf}.$$

Remarque. La valeur numérique de la longueur de l'échelle n'est pas nécessaire au calcul. Soit L cette longueur :

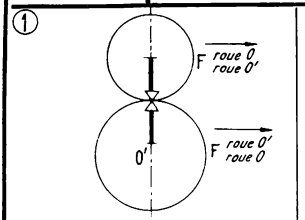
$gB = L/4$; $dB = 3L/8$; $CA = L\sqrt{3}/2$.

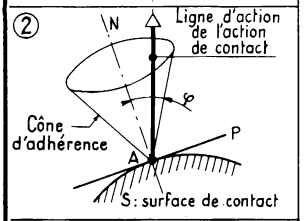
L'équation des moments algébriques s'écrit alors :

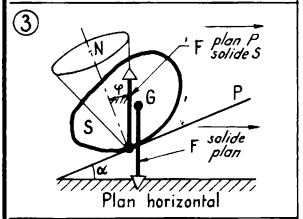
$$\frac{L}{4} \times 25 + \frac{3L}{8} \times 75 - \frac{L\sqrt{3}}{2} \times F_e^m = 0$$

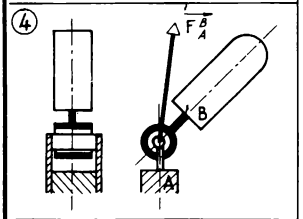
et $$F_e^m = \frac{\frac{25}{4} + \frac{3 \times 75}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{50 + 225}{4\sqrt{3}} \simeq 39{,}7 \text{ kgf}.$$

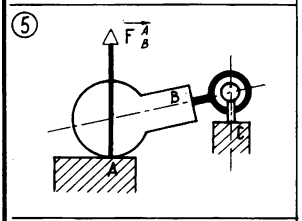
M. 27 ACTIONS DE CONTACT ET APPUIS

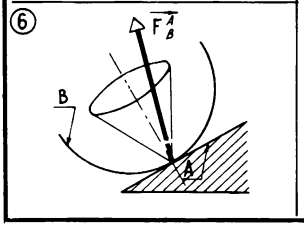












CAS DE SOLIDES PARFAITEMENT POLIS

Quand 2 solides en contact sont parfaitement polis, l'équilibre a lieu lorsque l'action de contact de l'un des solides sur l'autre est dirigée suivant la normale commune aux surfaces de ces solides en leur point de contact.

Exemple : *Deux roues parfaitement lisses en équilibre l'une sur l'autre (fig. 1) ; les actions de contact sont dirigées suivant la ligne des centres.*

CAS DE SOLIDES RUGUEUX

Quand 2 solides rugueux en contact sont en équilibre, l'action de contact de l'un des solides sur l'autre est dirigée suivant une droite passant par le point de contact et intérieure à un cône de révolution ayant pour axe la normale aux surfaces en leur point de contact, pour sommet le point de contact, pour angle au sommet 2φ.

Ce cône est le cône d'adhérence (fig. 2).

Le demi-angle au sommet φ est l'angle d'adhérence. La tangente de ce demi-angle est le coefficient d'adhérence.

Remarque : Si la droite d'action de la force de contact est une génératrice du cône, un des solides est sur le point de glisser sur l'autre (fig. 3). S est en équilibre sous l'action de 2 forces; elles sont directement opposées $\overrightarrow{F}^{terre}_{S} + \overrightarrow{F}^{plan}_{S} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$ par suite $\overrightarrow{F}^{plan}_{S}$ est verticale et $\alpha = \varphi$, α étant l'angle d'inclinaison de P sur le plan horizontal. C'est un moyen de mesurer φ.

DÉFINITIONS DES APPUIS

Articulation.

Deux solides sont **articulés** l'un sur l'autre, lorsque l'un des solides, ou les deux, peuvent tourner autour d'un axe perpendiculaire à leur plan médian (fig. 4). Une articulation donne lieu à une action de contact inconnue en direction, sens et intensité, $\overrightarrow{F}^{B}_{A}$. En projetant sur 2 directions perpendiculaires on obtient les projections de $\overrightarrow{F}^{B}_{A}$ qui permettent de calculer son intensité.

Appui complété par une articulation (fig. 5).

L'action de contact $\overrightarrow{F}^{A}_{B}$ est normale au plan de contact et dirigée du côté libre si la pièce est articulée en un autre point. Une seule inconnue : l'intensité de $\overrightarrow{F}^{A}_{B}$.

Appui seul avec frottement (fig. 6).

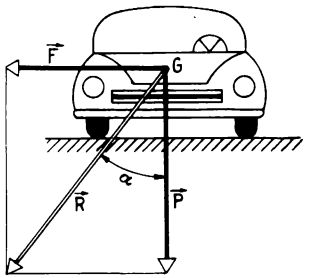
L'action de contact $\overrightarrow{F}^{A}_{B}$ est issue de A, orientée vers le côté libre et située à l'intérieur du cône d'adhérence. Deux inconnues.

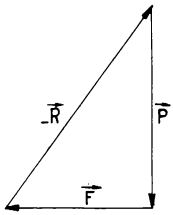
Remarque. L'appui parfaitement lisse n'existe pas en pratique.

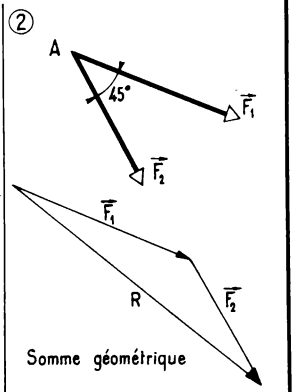
Les angles d'adhérence varient avec l'état de rugosité des surfaces.

Exemple : l'angle d'adhérence acier sur acier peut varier de 15° à 40°.

COMPOSITION DES FORCES (I) — M. 28







RÉSULTANTE DE PLUSIEURS FORCES appliquées à un système matériel.

Système matériel. Corps solide ou ensemble de corps solides liés entre eux.

Exemple : Une console est un système matériel. Chacune des barres de la potence pourra être considérée comme un système matériel.

Résultante. La résultante de l'ensemble des forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$... appliquées à un système matériel, est une force unique $\overrightarrow{R}$ telle que, pour le système matériel considéré, les conditions d'équilibre soient les mêmes sous l'action de $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$... ou sous l'action de $\overrightarrow{R}$.

Détermination de la résultante.

Il faut déterminer le point d'application, la ligne d'action, le sens et l'intensité.

On doit avoir $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}... \uparrow\uparrow \overrightarrow{R}$

ou $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}... - \overrightarrow{R} \uparrow\uparrow 0$

Donc, appliquer les conditions d'équilibre définies par les 3 propriétés des forces :

1. L'action et la réaction sont égales et directement opposées.
2. La somme géométrique de toutes les forces extérieures et de $(-\overrightarrow{R})$ est le vecteur neutre ; ou la somme géométrique des projections de toutes les forces et de $(-\overrightarrow{R})$ sur une droite ou sur un plan est le vecteur neutre.
3. La somme algébrique des moments algébriques, par rapport à un point, de toutes les forces extérieures et de $(-\overrightarrow{R})$ est égale à zéro.

Application (fig. 1). **Détermination de la résultante de deux forces concourantes.**

Une voiture automobile pesant 1 200 *kgp*, et décrivant une courbe, est soumise à une force horizontale, dite centrifuge, de 600 *kgf*. Déterminer la résultante de ces deux actions.

Solution.

Le poids $\overrightarrow{P}$ de la voiture appliqué en G, vertical, vers le bas, intensité 1 200 *kgp*.

La force centrifuge $\overrightarrow{F}$ appliquée en G, horizontale, vers la gauche, intensité 600 *kgf*.

$\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{F}$ ont une résultante $\overrightarrow{R}$, telle que :

$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} - \overrightarrow{R} \uparrow\uparrow 0$. Ces trois forces sont dans le même plan, ont même point d'application G ; leur somme géométrique est le vecteur neutre.

On trouve $R = 1\,340$ *kgf*.

$(-\overrightarrow{R})$ dirigée vers le haut, donc $\overrightarrow{R}$ vers le bas.

Calcul de l'intensité de $\overrightarrow{R}$.

$$R = \sqrt{P^2 + F^2} = \sqrt{1\,200^2 + 600^2} \simeq 1\,341 \text{ kgf}.$$

Direction de $\overrightarrow{R}$:

$\overrightarrow{R}$ fait avec la verticale l'angle α tel que :

$$\text{tg}\alpha = \frac{F}{P} = \frac{600}{1\,200} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha = 26°34'.$$

Remarque. Dans le cas ci-dessus, les directions des forces sont perpendiculaires.

S'il n'en était pas ainsi dans d'autres cas, pour le calcul de l'intensité de R on appliquerait la formule :

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos (F_1, F_2)},$$

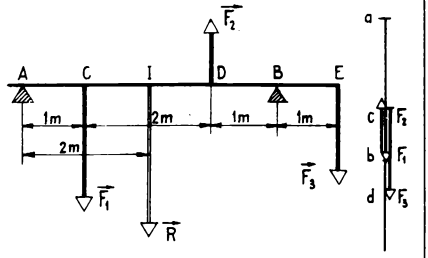
F_1 et F_2 étant des forces extérieures connues, (F_1, F_2) étant l'angle que forment leurs directions.

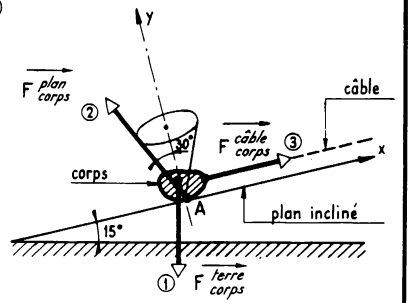
Exemple (fig. 2) :

$F_1 = 5$ *kgf*, $F_2 = 3$ *kgf*, $(F_1, F_2) = 45°$.

$$R = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2 \times 5 \times 3 \cos 45°}$$
$$= \sqrt{34 + 15\sqrt{2}} \simeq 7{,}4 \text{ kgf}.$$

M. 29 COMPOSITION DES FORCES (2)

① 

② 

RÉSULTANTE DES FORCES PARALLÈLES

Problème (fig. 1). Une poutre AE de longueur 5 *m* repose sur deux appuis de niveau A et B distants de 4 *m* ; l'appui A est à une extrémité de la poutre. Celle-ci supporte des charges concentrées verticales :

$\vec{F_1}$ à 1 *m* de A, vers le bas, intensité 100 *kgf* ;
$\vec{F_2}$ à 3 *m* de A, vers le haut, intensité 80 *kgf* ;
$\vec{F_3}$ à 1 *m* de B, en porte-à-faux, vers le bas, intensité 60 *kgf*.

Quelle est la résultante de ces trois forces ?

Solution (fig. 1).

La somme géométrique des trois forces est le vecteur neutre $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} - \vec{R} \uparrow\uparrow \vec{0}$.

Le polygone des forces est une droite :

$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{da} = 0$ et $\vec{R} \uparrow\uparrow \overline{ad}$.

Résultante : verticale, vers le bas, intensité 80 *kgf*.

Point d'application : Prendre les moments algébriques par rapport au point A du plan des trois forces.

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{M}_{alg}(A,\vec{F_1}) + \mathcal{M}_{alg}(A,\vec{F_2}) + \mathcal{M}_{alg}(A,\vec{F_3}) \\ + \mathcal{M}_{alg}[A,(-\vec{R})]\end{array}\right\} = 0$$

$$-1\times100 + 3\times80 - 5\times60 + \mathcal{M}_{alg}[A,(-\vec{R})] = 0$$

$$\mathcal{M}_{alg}[A,(-\vec{R})] = \mathbf{160}\ m.kgf$$

$\vec{R}$ dirigée vers le bas, donc $(-\vec{R})$ vers le haut. Son point d'application est à droite de A à une distance AI telle que :

$$AI \times 80 = 160$$
$$AI = \mathbf{2}\ m$$

Détermination par le calcul de la résultante de forces appliquées à un système matériel.

Les forces sont dans le même plan ou dans des plans parallèles.

Projeter les forces sur un plan parallèle aux plans des forces.

Dans ce plan projeter le système de vecteurs sur deux axes perpendiculaires X'X, Y'Y. On obtient les projections de la résultante qui permettent le calcul de l'intensité et de la direction.

Application (fig. 2). Sur un plan incliné à 15°, sur l'horizon, un corps pesant 100 *kgp* est tiré au moyen d'un câble parallèle à la ligne de plus grande perte du plan.

Effort de traction : 60 *kgf*.

Angle d'adhérence du corps sur le plan : 30°, On néglige les dimensions du corps.

Quelle est la résultante des actions auxquelles est soumis ce corps ?

Solution.

Forces extérieures :

$\vec{F}_{corps}^{terre}$ soit $\vec{F_1}$, verticale, vers le bas, intensité 100 *kgf*.

$\vec{F}_{corps}^{plan}$ soit $\vec{F_2}$, fait 30° avec la normale au plan vers la gauche, orientée du plan vers le corps.

$\vec{F}_{corps}^{câble}$ soit $\vec{F_3}$, parallèle à AX, vers la droite, intensité 60 *kgf*.

Projeter sur AX et AY orientés comme l'indique la figure.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{proj_{AX}}\,\vec{F_1} + \overrightarrow{proj_{AX}}\,\vec{F_2} + \overrightarrow{proj_{AX}}\,\vec{F_3} \\ + \overrightarrow{proj_{AX}}\,(-\vec{R})\end{array}\right\} \uparrow\uparrow 0$$

ou $100\cos225° + F_2\cos120° + 60\cos0 - \vec{Rx} = 0$

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{proj_{AY}}\,\vec{F_1} + \overrightarrow{proj_{AY}}\,\vec{F_2} + \overrightarrow{proj_{AY}}\,\vec{F_3} \\ + \overrightarrow{proj_{AY}}\,(-\vec{R})\end{array}\right\} \uparrow\uparrow 0$$

ou $100\cos165° + F_2\cos30° + 60\cos90° - R_Y = 0$

$$-25{,}882 - \frac{1}{2}F_2 + 60 = R_X \quad (1)$$

et $$-96{,}503 + \frac{\sqrt{3}}{2}F_2 = R_Y \quad (2)$$

Détermination de F_2 : lorsque le corps est en équilibre sur le point de monter $R = 0$.

L'équation (2) donne :

$$F_2 = \frac{96{,}593 \times 2}{\sqrt{3}} \simeq 55{,}766\ kgf.$$

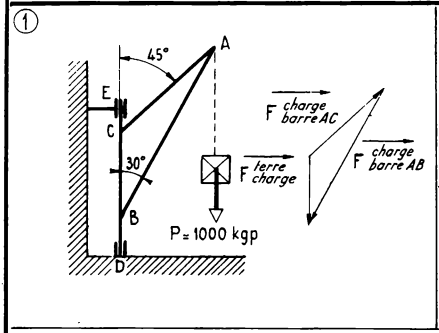
L'équation (1) donne :

$$R_x = -25{,}882 - 27{,}883 + 60 = 6{,}235\ kgf$$

et : $R_y = 0$.

Donc $\vec{R}$ parallèle au plan, sens de la montée, intensité **6,235** *kgf*.

DÉCOMPOSITION DES FORCES (I) — M. 30



DÉCOMPOSITION D'UNE FORCE EN DEUX FORCES CONCOURANTES

Une force $\overrightarrow{F}$ connue peut être décomposée en deux autres $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ à condition que ces trois forces soient dans le même plan. Elles seront concourantes ou parallèles. Il faut que l'on connaisse ou que l'on puisse déterminer les directions des deux forces inconnues et que l'on ait :

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{F} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} - \overrightarrow{F} \uparrow\downarrow \overrightarrow{0}$$

Application (fig. 1). Les barres de la volée d'une grue pivotante font avec l'axe vertical des angles de 30° et 45°. La grue déplace une charge de 1 000 *kgp*.

Déterminer les efforts dans les barres. Quelles sont les actions exercées sur la crapaudine D et le palier E?

Solution.

Les trois forces

$$\overrightarrow{F_{\substack{terre\\charge}}} \quad \overrightarrow{F_{\substack{barre\ AB\\charge}}} \quad \overrightarrow{F_{\substack{barre\ AC\\charge}}}$$

forment un système en équilibre lorsque la charge ne se déplace pas.

Leur somme géométrique est le vecteur neutre.

On trouve $\overrightarrow{F_{\substack{charge\\barre\ AB}}} = \mathbf{2\,730}$ *kgf* orienté de A vers B, donc AB est comprimée.

$\overrightarrow{F_{\substack{charge\\barre\ AC}}} = \mathbf{1\,930}$ *kgf* orientée de C vers A, AC est tendue.

Calcul des intensités de ces forces (fig. 2).

Prendre les moments algébriques par rapport à B. Soit **d** la portée de la grue.

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{M}_{alg}\left(B, \overrightarrow{F_{\substack{terre\\charge}}}\right) + \mathcal{M}_{alg}\left(B, \overrightarrow{F_{\substack{barre\ AB\\charge}}}\right)\\ + \mathcal{M}_{alg}\left(B, \overrightarrow{F_{\substack{barre\ AC\\charge}}}\right)\end{aligned}\right\} = 0$$

$$-1\,000d + 0 + \left(BH \times F_{\substack{AC\\charge}}\right) = 0$$

$$F_{\substack{AC\\charge}} = \frac{1\,000d}{BH}$$

$AB = 2d$; $\quad AC = d\sqrt{2}$; $\quad CI = d$

$BI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = d\sqrt{3}$; $\quad BC = BI - CI = d(\sqrt{3}-1)$

$$BH = \frac{BC\sqrt{2}}{2} = \frac{d(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2};$$

$$CK = \frac{BC}{2} = \frac{d(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$F_{\substack{AC\\charge}} = \frac{1\,000d \times 2}{d(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}} = \frac{1.000\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$\simeq \mathbf{1931{,}5}\ kgf.$$

Prendre les moments algébriques par rapport à C.

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{M}_{alg}\left(C, \overrightarrow{F_{\substack{terre\\charge}}}\right) + \mathcal{M}_{alg}\left(C, \overrightarrow{F_{\substack{AB\\charge}}}\right)\\ + \mathcal{M}_{alg}\left(C, \overrightarrow{F_{\substack{AC\\charge}}}\right)\end{aligned}\right\} = 0$$

$$-1\,000d + \left(CK \times F_{\substack{AB\\charge}}\right) + 0 = 0$$

$$F_{\substack{AB\\charge}} = \frac{1\,000d \times 2}{d(\sqrt{3}-1)} = 1\,000(\sqrt{3}+1)$$

$$\simeq \mathbf{2\,732}\ kgf.$$

Actions sur les appuis.

Le système matériel formé par la grue est en équilibre sous l'action de trois forces.

$\overrightarrow{F_{\substack{charge\\terre}}}$, appliquée en A, verticale, vers le bas, intensité 1 000 *kgf*.

$\overrightarrow{F_{\substack{appui\ E\\charge}}}$, appliquée en E, horizontale (normale au cylindre E), sens et intensité inconnus.

$\overrightarrow{F_{\substack{crapaudine,\\charge}}}$ appliquée en D, direction, sens et intensité inconnus.

Les directions de $\overrightarrow{F_{\substack{terre\\charge}}}$ et $\overrightarrow{F_{\substack{E\\charge}}}$ concourent en M (fig. 3); la ligne d'action de $\overrightarrow{F_{\substack{D\\charge}}}$ passe par M, c'est DM. Leur somme géométrique est le vecteur neutre. On trouve :

$$\overrightarrow{F_{\substack{E\\charge}}} \simeq 1\,330\ kgf$$

$$\overrightarrow{F_{\substack{D\\charge}}} \simeq 1\,050\ kgf$$

Le calcul se fait en considérant les triangles semblables MNP et MED. On obtient :

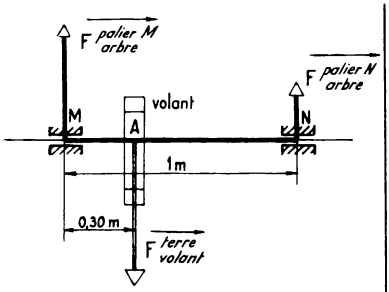
$$\overrightarrow{F_{\substack{E\\charge}}} = \mathbf{1\,333}\ kgf$$

$$\overrightarrow{F_{\substack{D\\charge}}} = \mathbf{1\,054}\ kgf$$

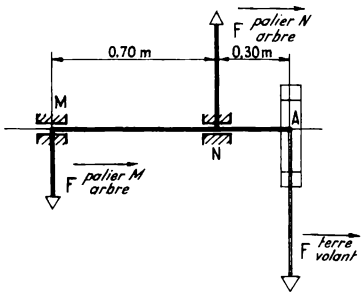
Angle de $\overrightarrow{F_{\substack{D\\charge}}}$ avec la verticale $\simeq$ **53°**.

M. 31 DÉCOMPOSITION DES FORCES (2)

①



②



DÉCOMPOSITION D'UNE FORCE EN DEUX FORCES PARALLELES

Une force $\overrightarrow{F}$ connue peut être décomposée en deux autres parallèles $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$. Ces trois forces étant dans le même plan, si on connaît un point de la ligne d'action de chacune des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, on aura :

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{F} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} - \overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

Application 1. Les lignes d'action de $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont de part et d'autre de $\overrightarrow{F}$ (fig. 1).

Un arbre de longueur 1 *m* repose à ses extrémités sur deux paliers M et N ; à 0,30 *m* de M il supporte un volant pesant 400 *kgp*.

En négligeant le poids de l'arbre, quelles sont les actions de contact sur les paliers?

Solution.

Forces extérieures :

$$\overrightarrow{F^{\,terre}_{volant}} + \overrightarrow{F^{\,palier\ M}_{arbre}} + \overrightarrow{F^{\,palier\ N}_{arbre}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

Les lignes d'action étant parallèles, le polygone dynamique ne permet pas de déterminer les intensités des deux actions de contact en M et N. Prendre les moments algébriques par rapport à M.

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{M}_{alg}\left(M, \overrightarrow{F^{\,terre}_{volant}}\right) + \mathcal{M}_{alg}\left(M, \overrightarrow{F^{\,palier\ M}_{arbre}}\right) \\ &+ \mathcal{M}_{alg}\left(M, \overrightarrow{F^{\,palier\ N}_{arbre}}\right) \end{aligned}\right\} = 0$$

$$-(0.30 \times 400) + 0 + \left(1 \times F^{\,palier\ N}_{arbre}\right) = 0$$

$F^{\,palier\ N}_{arbre}$ est dirigé vers le haut, puisque son moment algébrique est positif.

$F^{\,N}_{arbre} = 120$ *kgf*.

$F^{\,M}_{arbre} = 400 - 120 = 280$ *kgf*. Verticale vers le haut.

Les composantes cherchées de $\overrightarrow{F^{\,terre}_{volant}}$ sont :

$$\overrightarrow{F_M} \uparrow\uparrow -\overrightarrow{F^{\,M}_{arbre}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F_N} \uparrow\uparrow -\overrightarrow{F^{\,N}_{arbre}}$$

Application 2. Les lignes d'action de $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont du même côté de $\overrightarrow{F}$ (fig. 2).

Un arbre de longueur 1 *m* repose sur deux appuis M et N distants de 0,70 *m*.

M est à une extrémité de l'arbre. A son extrémité libre, l'arbre supporte un volant de poids 400 *kgp*.

En négligeant le poids de l'arbre quelles sont les actions de contact sur les paliers?

Solution.

Forces extérieures :

$$\overrightarrow{F^{\,terre}_{volant}} + \overrightarrow{F^{\,palier\ M}_{arbre}} + \overrightarrow{F^{\,palier\ N}_{arbre}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{M}_{alg}\left(M, \overrightarrow{F^{\,terre}_{volant}}\right) + \mathcal{M}_{alg}\left(M, \overrightarrow{F^{\,palier\ M}_{arbre}}\right) \\ &+ \mathcal{M}_{alg}\left(M, \overrightarrow{F^{\,palier\ N}_{arbre}}\right) \end{aligned}\right\} = 0$$

$$(-1 \times 400) + 0 + \left(0{,}7 \times F^{\,palier\ N}_{arbre}\right) = 0$$

donc $\overrightarrow{F^{\,palier\ N}_{arbre}}$ verticale vers le haut.

$$F^{\,palier\ N}_{arbre} = \frac{400}{0{,}7} \simeq \mathbf{571{,}4}\ kgf.$$

$$F^{\,palier\ M}_{arbre} = 400 - 571{,}4 = -\mathbf{171{,}4}\ kgf.$$

donc verticale vers le bas.

Ces forces sont les réactions des appuis.

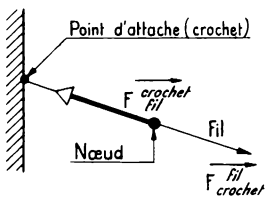
Les actions de contact composantes de $\overrightarrow{F^{\,terre}_{volant}}$ en M et N sont égales et directement opposées aux réactions ci-dessus.

Remarque 1. Dans les deux cas précédents on pouvait calculer la deuxième réaction d'appui en prenant les moments algébriques par rapport à N.

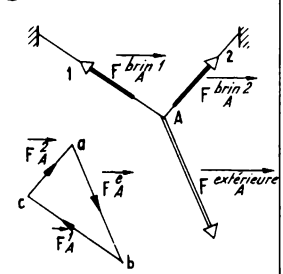
Remarque 2. Si la force donnée $\overrightarrow{F}$ et les forces parallèles cherchées ne sont pas dans le même plan, on projette sur un plan parallèle à ces forces et l'on applique la méthode ci-dessus.

MÉTHODE DU FUNICULAIRE (I) — M. 32

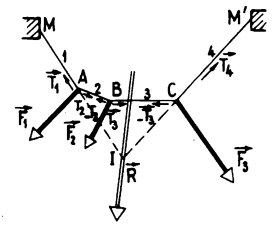
①

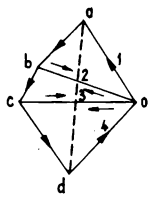


②



③





DÉFINITIONS

Un polygone funiculaire (ou funiculaire) est un polygone de fils en équilibre sous l'action de forces extérieures. Ces fils sont de section négligeable, parfaitement flexibles et inextensibles.

Exemple. Polygone formé par les fils conducteurs du courant des lignes de trolleybus dans une boucle.

Nœud. Point matériel du fil sur lequel s'exerce une force extérieure au fil.

Entre 2 nœuds ne s'exerce aucune force extérieure au fil, donc le funiculaire est un segment de droite.

Toutes les forces sont dans le même plan.

CONDITION D'ÉQUILIBRE

Chaque nœud doit être en équilibre.

Nœud à l'extrémité d'un fil. En équilibre sous l'action de 2 forces : la force (extérieure pour le fil) exercée par le point de fixation, et la force exercée par le brin du fil sur ce point (fig. 1). Ces 2 forces sont égales et directement opposées.

$$\overrightarrow{F_{\substack{fil\\crochet}}} + \overrightarrow{F_{\substack{crochet\\fil}}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

Nœud non situé à l'extrémité d'un fil (fig. 2). En équilibre sous l'action de 3 forces : la force, extérieure au fil, exercée sur le nœud, et les 2 forces exercées sur le nœud A par les 2 brins de fils qui aboutissent à ce nœud.

$$\overrightarrow{F_{\substack{brin\ 1\\A}}} + \overrightarrow{F_{\substack{extérieure\\A}}} + \overrightarrow{F_{\substack{brin\ 2\\A}}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

Le polygone des forces est fermé

$\overrightarrow{F_{\substack{brin\ 1\\A}}}$ est la tension du brin 1 soit $\overrightarrow{T_1}$

$\overrightarrow{F_{\substack{brin\ 2\\A}}}$ est la tension du brin 2 soit $\overrightarrow{T_2}$

Funiculaire à plusieurs nœuds (fig. 3).

On connaît

$$\overrightarrow{F_{\substack{extérieure\\A}}} \qquad \overrightarrow{F_{\substack{extérieure\\B}}} \qquad \overrightarrow{F_{\substack{extérieure\\C}}}$$

soit plus simplement

$$\overrightarrow{F_A^e} \qquad \overrightarrow{F_B^e} \qquad \overrightarrow{F_C^e}$$

On choisit arbitrairement les directions des brins 1 et 2. On construit le dynamique (polygone des forces) relatif au nœud A ; il est fermé (équilibre) soit OabO qui donne sens et intensité de $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$.

Même construction pour le nœud B en remarquant que

$$\overrightarrow{F_A^i} \uparrow\uparrow -\overrightarrow{F_B^i} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{bO} \uparrow\uparrow -\overrightarrow{Ob}$$

Le segment Ob est commun aux 2 dynamiques OabO et ObcO. Même opération pour le nœud C.

Les 3 dynamiques d'équilibre juxtaposés par leurs côtés communs constituent le dynamique d'équilibre. O est le pôle.

Oa, Ob, Oc, Od sont les rayons polaires, ils donnent, à l'échelle de représentation adoptée pour les forces, les intensités des tensions dans les brins 1, 2, 3, 4.

M. 33 MÉTHODE DU FUNICULAIRE (2)

REMARQUE I

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} \uparrow\uparrow \overrightarrow{ad}$$

et $$\overrightarrow{F^e_a} + \overrightarrow{F^e_b} + \overrightarrow{F^e_c} \uparrow\uparrow \overrightarrow{R}$$

donc $$\overrightarrow{ad} \uparrow\uparrow \overrightarrow{R}$$

Mais $\overrightarrow{da} \uparrow\uparrow \overrightarrow{dO} + \overrightarrow{Oa}$, donc $\overrightarrow{da}$ est équipollent à la résultante des tensions dans les cordons extérieurs 1 et 4

par suite $$\overrightarrow{R} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_4} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

ou $$\overrightarrow{R} \uparrow\uparrow -\overrightarrow{T_2} - \overrightarrow{T_4}$$

La résultante des forces extérieures et celle des tensions des cordons extrêmes sont directement opposées. $\overrightarrow{R}$ passe par I, intersection des directions des cordons extrêmes.

Règle : La résultante d'un système de forces situées dans un même plan, agissant aux différents nœuds d'un funiculaire, passe par l'intersection I des directions des cordons extrêmes du funiculaire. Elle est donnée en direction, sens et intensité par le vecteur qui ferme le dynamique des forces extérieures.

REMARQUE II

On a choisi arbitrairement les deux premiers côtés du funiculaire, il y a donc une infinité de funiculaires possibles. Le dynamique abcd est indépendant de la position des cordons, il en est de même pour la résultante $\overrightarrow{R} \uparrow\uparrow \overrightarrow{ad}$ qui passe par I.

Dans un autre funiculaire où les cordons extrêmes se rencontreraient en J, elle passerait par ce point.

Chacun de ces funiculaires étant en équilibre, on a les relations suivantes :

Funiculaire I

$$\overrightarrow{F^e_A} + \overrightarrow{F^e_B} + \overrightarrow{F^e_C} - \overrightarrow{R_I} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\mathcal{M}_{alg}(P, \overrightarrow{F^e_A}) + \mathcal{M}_{alg}(P, \overrightarrow{F^e_B}) + \mathcal{M}_{alg}(P, \overrightarrow{F^e_C}) + \mathcal{M}_{alg}(P, \overrightarrow{R_I}) = 0$$

Funiculaire II

$$\overrightarrow{F^e_A} + \overrightarrow{F^e_B} + \overrightarrow{F^e_C} - \overrightarrow{R_J} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{M}_{alg}(P, \overrightarrow{F^e_A}) + \mathcal{M}_{alg}(P, \overrightarrow{F^e_B}) \\ + \mathcal{M}_{alg}(P, \overrightarrow{F^e_C}) + \mathcal{M}_{alg}(P, \overrightarrow{R_J}) \end{array}\right\} = 0$$

D'où l'on déduit :

$\overrightarrow{R_I} \uparrow\uparrow \overrightarrow{R_J}$ (déjà remarqué ci-dessus)

$\mathcal{M}_{alg}(P, \overrightarrow{R_I}) = \mathcal{M}_{alg}(P, \overrightarrow{R_J})$

$\overrightarrow{R_I}$ et $\overrightarrow{R_J}$ sont à la même distance de P (point quelconque du plan), donc ont même ligne d'action.

Le pôle O peut donc être choisi arbitrairement.

REMARQUE III

On peut remplacer les forces extérieures par des forces équipollentes portées par la même droite d'action, cela n'entraîne aucune modification de la somme géométrique, ni des moments algébriques : donc la résultante reste invariable.

REMARQUE IV

Les constructions précédentes sont indépendantes de la forme et de la nature du corps sur lequel agissent les forces extérieures ; il suffit que ce corps soit en équilibre. On peut donc ramener un corps à un polygone funiculaire.

REMARQUE V

Un dynamique ouvert indique un système réductible à une résultante.

Un dynamique fermé et un funiculaire ouvert indiquent un couple.

Un dynamique fermé et un funiculaire fermé indiquent un système en équilibre.

En résumé :

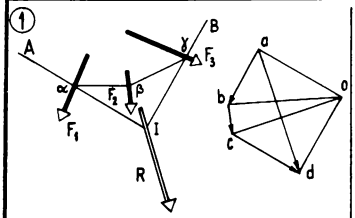
1° Un système de forces coplanaires peut toujours être réduit à deux forces qui ont respectivement pour lignes d'action, le premier et le dernier côté du funiculaire et pour vecteur libre, le premier et le dernier rayon polaire parcourus de l'origine à l'extrémité.

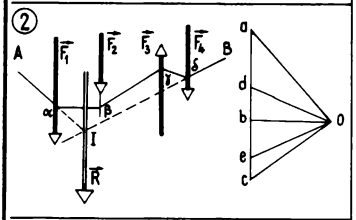
2° Un système de forces coplanaires est en équilibre (ou nul) lorsque simultanément le dynamique et le funiculaire sont fermés.

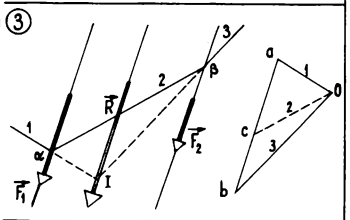
3° Un système est réductible à un couple lorsque simultanément le dynamique est fermé et le funiculaire ouvert.

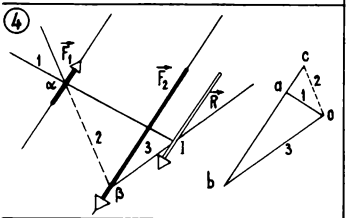
4° Un système est réductible à une résultante unique lorsque le dynamique est ouvert.

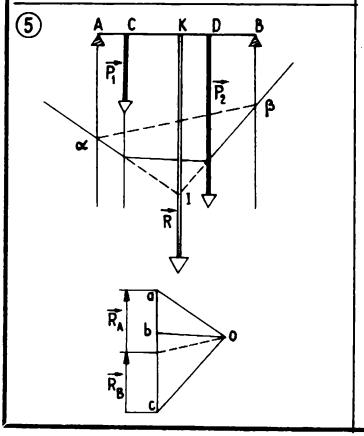
APPLICATIONS DU FUNICULAIRE | M. 34











RÉSULTANTE D'UN SYSTÈME DE FORCES COPLANAIRES

Forces quelconques dans le même plan (fig. 1).

On doit avoir $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} \uparrow\uparrow \vec{R}$.

Former le dynamique **a b c d**; on en déduit $\vec{R} \uparrow\uparrow \vec{ad}$. La ligne d'action de $\vec{R}$ passe par I point de rencontre des cordons extrêmes Aα et γB.

Forces parallèles dans le même plan (fig. 2).

On doit avoir $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} \uparrow\uparrow \vec{R}$.

Construire le dynamique **a b c d e**; on en déduit $\vec{R} \uparrow\uparrow \vec{ae}$. La ligne d'action de $\vec{R}$ passe par l'intersection de Aα et δB.

DÉCOMPOSITION D'UNE FORCE EN 2 AUTRES PARALLÈLES

$\vec{R}$ donnée; $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ cherchées (fig. 3).

Les lignes d'action de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont de part et d'autre de $\vec{R}$.

$\vec{ab} \uparrow\uparrow \vec{R}$; pôle **O** quelconque, αI parallèle à **aO**, Iβ parallèle à **bO**.

Mener par **O** la parallèle à αβ soit **Oc**.

On obtient $\vec{ac} \uparrow\uparrow \vec{F_1}$, $\vec{cb} \uparrow\uparrow \vec{F_2}$.

Les lignes d'action de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont du même côté par rapport à $\vec{R}$ (fig. 4).

$\vec{ab} \uparrow\uparrow \vec{R}$; pôle **O** quelconque, αI parallèle à **aO**, Iβ parallèle à **bO**. Mener par **O** la parallèle à αβ soit **Oc**. On obtient $\vec{ac} \uparrow\uparrow \vec{F_1}$, $\vec{cb} \uparrow\uparrow \vec{F_2}$.

Application.

Une poutre AB repose à ses extrémités sur 2 appuis de niveau distants de 6 *m*. Elle supporte une charge verticale dirigée vers le bas $P_1 = 200$ *kgp* appliquée en C tel que AC = 1 *m*, et une charge verticale vers le bas $P_2 = 500$ *kgp* appliquée en D tel que DB = 2 *m*. Déterminer :

1. La résultante de ces charges.
2. Les actions de contact aux appuis A et B.

Solution.

La solution graphique est donnée par la figure 5.

On obtient AK = 3,30 *m*. R = 700 *kgp*.

$\vec{R_A}$ verticale vers le haut, intensité **370** *kgp*.

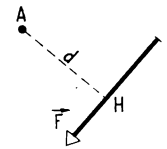
$\vec{R_B}$ verticale vers le haut, intensité **330** *kgp*.

Nota : Il est indispensable, lorsqu'on emploie une méthode graphique, comme celle du funiculaire, de faire le dessin avec précision à une échelle qu'il faut indiquer, par exemple échelle des longueurs 2 *cm* pour 1 *m*. La représentation des forces se fait à une échelle qu'il faut également indiquer, par exemple 1 *cm* représente 100 *kgp*.

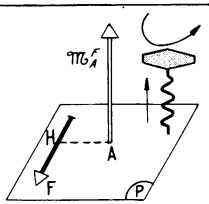
En donnant les résultats, ne pas se contenter de la valeur numérique de l'intensité, mais préciser les points d'application des forces, leurs directions et leurs sens.

M. 35 MOMENT ALGÉBRIQUE DES FORCES (I)

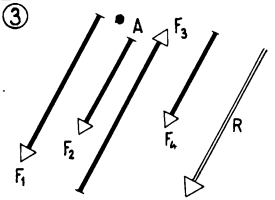
①



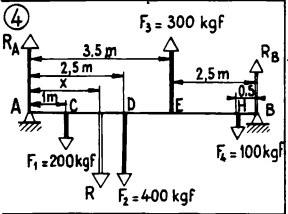
②



③

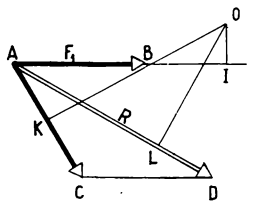


④



⑤

$\mathcal{M}_{alg}(0,\overrightarrow{F_1}) = 01 \cdot F_1$
$\mathcal{M}_{alg}(0,\overrightarrow{F_2}) = 0K \cdot F_2$
$\mathcal{M}_{alg}(0,\overrightarrow{R}) = 0L \cdot R$



DÉFINITION DU MOMENT (Voir M 23, fig. 1).

Le sens + généralement adopté est le sens de rotation inverse des aiguilles d'une montre.

$$\mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{F}) = - AH \cdot F = - d F$$ (fig. 1).

Unité de moment algébrique *m.kgf* et *m.N*

Représentation vectorielle (fig. 2).

Le vecteur moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est porté par un axe perpendiculaire au plan déterminé par $(A, \overrightarrow{F})$. Origine A ; sens donné par le déplacement du tire-bouchon (hélice à droite) lorsqu'il tourne dans le sens de $\overrightarrow{F}$ autour de A ; module proportionnel à la valeur de d .

F à une échelle que l'on indique. Exemple : 1 *cm* représente 1 *m.kgf*.

Moment alg. de la résultante de forces parallèles coplanaires par rapport à un point de leur plan.

$$\mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{R}) = \mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{F_1}) + \mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{F_2}) + \mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{F_3}) + \mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{F_4})$$ (fig. 3).

Le moment algébrique de la résultante de plusieurs forces parallèles coplanaires par rapport à un point de leur plan est égal à la somme algébrique des moments algébriques des forces par rapport à ce point.

Application I. *Détermination par le calcul de la résultante d'un système de forces coplanaires.*

Exemple : (fig. 4).

$$\mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{R}) = -(1 \times 200) - (2{,}5 \times 400) + (3{,}5 \times 300) - (5{,}5 \times 100) = -200 - 1000 + 1050 - 550 = -700 \ m.kgf.$$

En prenant comme sens positif des forces celui de la pesanteur

$R = F_1 + F_3 - F_3 + F_4 = 200 + 400 - 300 + 100 = 400 \ kgf.$

$\mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{R}) = -x \times 400 = -700$ d'où $x = 1{,}75 \ m$

$\overrightarrow{R}$ dirigée vers le bas, point d'application à droite de A.

Application II. *Réactions d'appui en A et B.*

$\overrightarrow{R}$ peut être décomposée en 2 forces $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ qui sont les actions de contact en A et B :

$$\overrightarrow{R_A} \uparrow\uparrow - \overrightarrow{F_A} \qquad \overrightarrow{R_B} \uparrow\uparrow - \overrightarrow{F_B}$$

$$\mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{R}) = \mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{F_A}) + \mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{F_B})$$

$$-700 = 0 + \mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{F_B}) = -6 \times F_B$$

$$F_B = \frac{700}{6} \simeq 117 \ kgf \qquad F_A \simeq 400 - 117 \simeq 283 \ kgf$$

$\overrightarrow{R_A}$ verticale vers le haut, intensité 283 *kgf*

$\overrightarrow{R_B}$ verticale vers le haut, intensité 117 *kgf*.

Moment algébrique d'un système de forces concourantes par rapport à un point de leur plan (fig. 5).

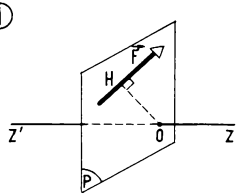
Le moment algébrique de la résultante de plusieurs forces concourantes coplanaires par rapport à un point de leur plan est égal à la somme algébrique des moments algébriques des forces par rapport à ce point.

$$\mathcal{M}_{alg}(O, \overrightarrow{R}) = \mathcal{M}_{alg}(O, \overrightarrow{F_1}) + \mathcal{M}_{alg}(O, \overrightarrow{F_2}).$$

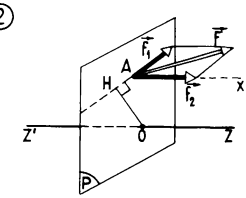
MOMENT ALGÉBRIQUE DES FORCES (2)

M. 36

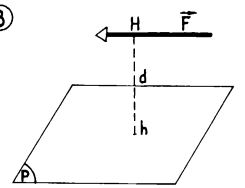
①



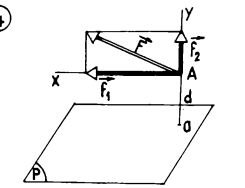
②



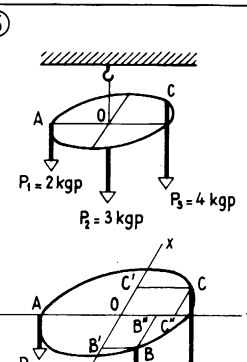
③



④



⑤



Moment algébrique d'un système de forces par rapport à un axe.

Moment alg. d'une force par rapport à un axe :

1er cas : La force $\vec{F}$ est dans un plan (P) perpendiculaire à l'axe zz' qui le rencontre en O (fig. 1).

$$\mathcal{M}_{alg}(z'z, \vec{F}) = \mathcal{M}_{alg}(O, \vec{F}) = \pm OH \cdot F$$

2e cas : $\vec{F}$ est quelconque par rapport à l'axe (fig. 2).

Par A, point d'application de $\vec{F}$, mener (P) perpendiculaire à z'z. Projeter $\vec{F}$ sur (P) soit $\vec{f_1}$. Projeter $\vec{F}$ sur AX parallèle à z'z, soit $\vec{f_2}$.

$\vec{f_2}$ ne provoque pas de rotation autour de z'z.

Par suite

$$\mathcal{M}_{alg}(z'z, \vec{F}) = \mathcal{M}_{alg}(z'z, \vec{f_1}) = \pm OH \cdot f_1$$

Moment alg. de la résultante d'un système de forces concourantes ou parallèles par rapport à un axe :

Il est égal à la somme algébrique des moments algébriques des forces par rapport à cet axe.

Moment algébrique d'un système de forces par rapport à un plan.

Moment alg. d'une force par rapport à un plan :

1er cas : $\vec{F}$ est parallèle à (P) (fig. 3).

$$\mathcal{M}_{alg}(P, \vec{F}) = \pm d \cdot F.$$

2e cas : $\vec{F}$ est quelconque par rapport à (P) (fig. 4).

Dans le plan perpendiculaire à (P) et contenant $\vec{F}$ projeter $\vec{F}$ sur Ax parallèle à (P), soit $\vec{f_1}$ et sur Ay perpendiculaire à (P), soit $\vec{f_2}$.

$\vec{f_2}$ ne produit pas de rotation ; par suite :

$$\mathcal{M}_{alg}(P, \vec{F}) = \mathcal{M}_{alg}(P, \vec{f_1}) = \pm Aa \cdot f_1 = \pm d \cdot f_1$$

Moment alg. de la résultante d'un système de forces concourantes ou parallèles par rapport à un plan :

Il est égal à la somme algébrique des moments algébriques des forces par rapport à ce plan.

Application.

Un anneau suspendu en son centre O supporte des poids de 2 *kgp*, 3 *kgp*, 4 *kgp*. En quels points faut-il appliquer ces poids pour que l'anneau reste horizontal ?

Solution (fig. 5).

Soient A, B, C les points cherchés. Rapporter le cercle à 2 diamètres perpendiculaires x'x, y'y dont l'un passe par A (arbitraire). L'horizontalité de l'anneau sera obtenue lorsque la résultante des 3 forces $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$ passera par O.

$$\mathcal{M}_{alg}(x'x, \vec{P_1}) + \mathcal{M}_{alg}(x'x, \vec{P_2}) + \mathcal{M}_{alg}(x'x, \vec{P_3}) = \mathcal{M}_{alg}(x'x, \vec{R}) = 0,$$
$$\mathcal{M}_{alg}(y'y, \vec{P_1}) + \mathcal{M}_{alg}(y'y, \vec{P_2}) + \mathcal{M}_{alg}(y'y, \vec{P_3}) = \mathcal{M}_{alg}(y'y, \vec{R}) = 0.$$

r étant le rayon de l'anneau.

$$(r \times 2) - (BB' \times 3) - (CC' \times 4) = 0$$

et

$$O - (BB'' \times 3) + (CC'' \times 4) = 0$$

$$BB'^2 + BB''^2 = r^2 \quad \text{et} \quad CC'^2 + CC''^2 = r^2$$

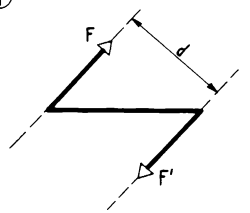
Système de 4 équations à 4 inconnues BB', BB'', CC', CC''. La résolution donne les résultats suivants :

$$BB' = \frac{r}{4} ; \qquad CC' = \frac{11r}{16}$$

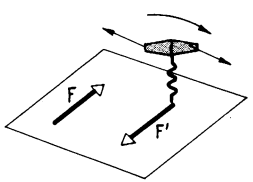
qui permettent de déterminer les points **B** et **C**.

M. 37 — COUPLES (I)

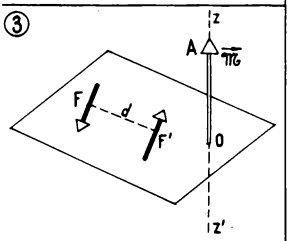
①



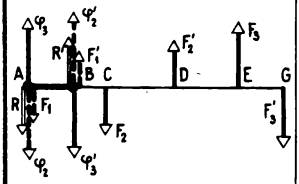
②



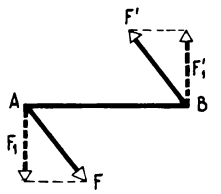
③



④



⑤



DÉFINITION D'UN COUPLE

Système de 2 forces de même direction, de sens contraires, de même intensité : $\vec{F} \uparrow\uparrow -\vec{F'}$ ou $\vec{F} + \vec{F'} \uparrow\uparrow \vec{0}$. Leur somme géométrique est nulle, mais le système n'est pas en équilibre, il produit une rotation ou une déformation sur le corps auquel il est appliqué.

Exemple : taraud - boussole - galvanomètre à cadre mobile.

Moment algébrique d'un couple.

Il est proportionnel à l'intensité des forces et à leur distance, appelée parfois *bras de levier* (fig. 1).

$$\mathcal{M}_{alg}(\vec{F}, \vec{F'}) = \pm d \cdot F$$

s'exprime en *mkgf* ou *m.N*

Par convention : sens + si un observateur debout sur le plan du couple voit la rotation tendant à se faire en sens inverse des aiguilles d'une montre.

Sens — : sens contraire.

Règle du tire-bouchon (fig. 2).

Sens + : lorsque le tire-bouchon (hélice à droite) tournant dans le sens du couple tend à s'éloigner du plan du couple.

Sens — : sens contraire.

Représentation vectorielle (fig. 3).

Par O quelconque dans le plan du couple, mener ZZ' perpendiculaire à ce plan ; sur cette ligne d'action, dans le sens indiqué par le déplacement du tire-bouchon porter $OA = d \cdot F$ à une échelle à indiquer $\overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathcal{M}_{alg}(\vec{F}, \vec{F'})}$.

Couples équivalents.

Ont même moment algébrique (fig. 5).

Exemple : Le couple $(\vec{F}, \vec{F'})$ appliqué en A et B est équivalent au couple $(\vec{F_1}, \vec{F'_1})$ appliqué aux mêmes points, $\vec{F_1}$ et $\vec{F'_1}$ étant les composantes normales de $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ pour la barre AB.

PROPRIÉTÉS DES COUPLES

On peut faire tourner un couple dans son plan.

On peut faire glisser un couple dans son plan.

On peut déplacer un couple dans un plan parallèle au sien.

COMPOSITION DES COUPLES

Couples de même direction dans le même plan (fig. 4).

Remplacer chaque couple par un couple équivalent, tous les couples équivalents ayant même bras de levier, puis faire la somme géométrique des forces à chaque extrémité du bras de levier commun choisi.

Application.

Données : couples $(\vec{F_1}, \vec{F'_1})$; $(\vec{F_2}, \vec{F'_2})$; $(\vec{F_3}, \vec{F'_3})$.

Bras de levier commun AB.

Remplacer $(\vec{F_2}, \vec{F'_2})$ par $(\vec{\varphi_2}, \vec{\varphi'_2})$ équivalent de bras de levier AB, c'est-à-dire $CD \times F_2 = AB \times \varphi_2$ d'où $\varphi_2 = F_2 \times \frac{CD}{AB}$.

De même : $-EG \times F_3 = -AB \times \varphi_3$; $\varphi_3 = F_3 \times \frac{EG}{AB}$.

En A, on aura :

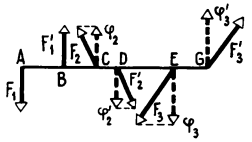
$\vec{R_A} \uparrow\uparrow \vec{F_1} + \vec{\varphi_2} + \vec{\varphi_3}$; et en B : $\vec{R_B} \uparrow\uparrow \vec{F'_1} + \vec{\varphi'_2} + \vec{\varphi'_3}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{alg}(\vec{R_A}, \vec{R_B}) &= AB \times R_A = AB \times (F_1 + \varphi_2 - \varphi_3) \\ &= AB \times F_1 + AB \times \varphi_2 - AB \times \varphi_3 \\ &= \mathcal{M}_{alg}(\vec{F_1}, \vec{F'_1}) + \mathcal{M}_{alg}(\vec{F_2}, \vec{F'_2}) + \mathcal{M}_{alg}(\vec{F_3}, \vec{F'_3}).\end{aligned}$$

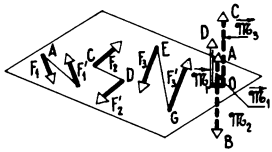
COUPLES (2)

M. 38

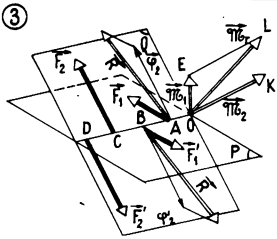
①



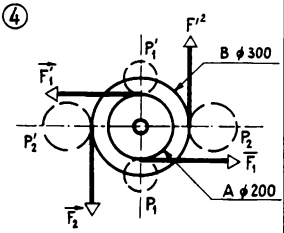
②



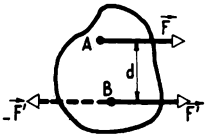
③



④



⑤



Couples de directions différentes, dans le même plan (fig. 1).

Remplacer $(\vec{F_2}, \vec{F'_2})$ par $(\vec{\varphi_2}, \vec{\varphi'_2})$ et $(\vec{F_3}, \vec{F'_3})$ par $(\vec{\varphi_3}, \vec{\varphi'_3})$ et appliquer la méthode précédente. Si les points d'application des forces sont quelconques dans le plan, on pourra, par rotations et glissements, amener les points A et B de $(\vec{F_1}, \vec{F'_1})$, C et D de $(\vec{F_2}, \vec{F'_2})$, E et G de $(\vec{F_3}, \vec{F'_3})$ à être alignés. On appliquera alors la méthode précédente (fig. 2).

Méthode vectorielle (fig. 2).

$\vec{OA} \uparrow\uparrow \vec{\mathcal{M}_{alg}}(\vec{F_1}, \vec{F'_1})$ $\quad \vec{OB} \uparrow\uparrow \vec{\mathcal{M}_{alg}}(\vec{F_2}, \vec{F'_2})$

$\vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{\mathcal{M}_{alg}}(\vec{F_3}, \vec{F'_3})$

$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OD}$ $\quad \vec{OD} \uparrow\uparrow \vec{\mathcal{M}_{alg}}(\vec{R}, \vec{R'})$

ou moment algébrique résultant.

Couples dans des plans différents.

Remplacer le couple $(\vec{F_2}, \vec{F'_2})$ par le couple équivalent $(\vec{\varphi_2}, \vec{\varphi'_2})$ appliqué en A et B, points d'application de $(\vec{F_1}, \vec{F'_1})$.

Composer $\vec{F_1}$ et $\vec{\varphi_2}$ en A $\quad \vec{R} \uparrow\uparrow \vec{F_1} + \vec{\varphi_2}$ et

Composer $\vec{F'_2}$ et $\vec{\varphi'_2}$ en B $\quad \vec{R'} \uparrow\uparrow \vec{F'_1} + \vec{\varphi'_2}$

Le couple résultant est $(\vec{R_1 R'})$ appliqué en A et B. Si l'on avait $F_1 = \varphi_2$, $\vec{R}$ et $\vec{R'}$ seraient dans un des plans bissecteurs du dièdre (P, Q).

Ce problème se traite aussi par la méthode vectorielle.

$\vec{OE} \uparrow\uparrow \vec{\mathcal{M}_{alg}}(\vec{F_1}, \vec{F'_1})$ (perpendiculaire au plan P)

$\vec{OK} \uparrow\uparrow \vec{\mathcal{M}_{alg}}(\vec{F_2}, \vec{F'_2})$ (perpendiculaire au plan Q)

$\vec{OL} \uparrow\uparrow \vec{OE} + \vec{OK} \uparrow\uparrow \vec{\mathcal{M}_{alg}}$ résultant [(perpendiculaire au plan du couple résultant $(\vec{R}, \vec{R'})$].

Application (fig. 4). Sur un arbre est calé un bloc de 2 roues dentées A et B ; A engrène avec les pignons P_1 et P'_1 auxquels elle transmet des efforts tangentiels $F_1 = F'_1 = 80$ *kgf*. B engrène avec les pignons P_2 et P'_2 auxquels elle transmet des efforts tangentiels $F_2 = F'_2 = 60$ *kgf*. On veut remplacer cet ensemble par une roue dentée unique de Φ 250 *mm* entraînant 2 pignons diamétralement opposés. Quels seront les efforts sur les dentures de ces pignons ?

Solution.

$\mathcal{M}_{alg}(\vec{F_1}, \vec{F'_1}) = 0{,}2 \times 80 = 16$ *mkgf*.

$\mathcal{M}_{alg}(\vec{F_2}, \vec{F'_2}) = 0{,}3 \times 60 = 18$ *mkgf*.

Moment algébrique total = 34 *mkgf*.

Soient φ et φ' les efforts sur la denture de la roue unique.

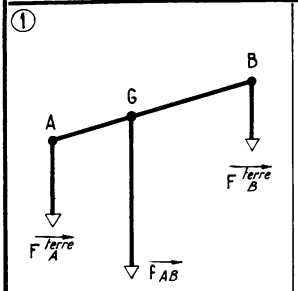
$\mathcal{M}_{alg}(\varphi, \varphi') = 34$ *mkgf* $= 0{,}25 \cdot \varphi$.

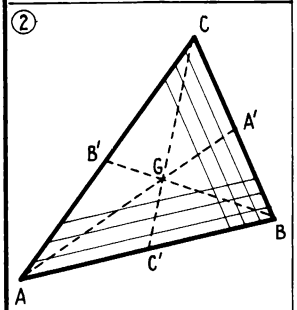
$\varphi = \dfrac{34}{0{,}25} = 136$ *kgf*.

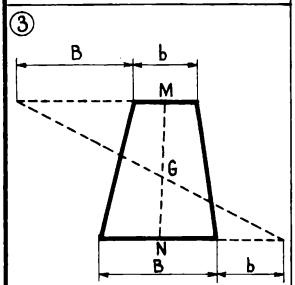
Remarque.

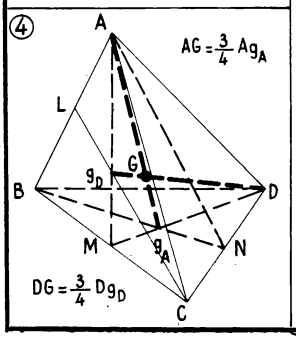
Une force $\vec{F}$ appliquée en A (fig. 5), est équivalente à la force $\vec{F'} \uparrow\uparrow \vec{F}$ appliquée en B et au couple $(\vec{F}, -\vec{F'})$ de moment algébrique d · F. Il suffit d'appliquer en B le système en équilibre $(\vec{F'}, -\vec{F'})$ tel que $\vec{F'} \uparrow\uparrow \vec{F}$.

M. 39 CENTRE DE GRAVITÉ (I)









CENTRE DE GRAVITÉ D'UN ENSEMBLE DE 2 POINTS MATERIELS A ET B

C'est un point G situé sur AB qui partage ce segment en parties inversement proportionnelles aux intensités des forces $\overrightarrow{F^{terre}_A}$ et $\overrightarrow{F^{terre}_B}$ et qui est le point d'application d'une force fictive $\overrightarrow{f_{AB}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{F^{terre}_A} + \overrightarrow{F^{terre}_B}$ (fig. 1).

Centre de gravité d'un ensemble de points matériels. Point d'application d'une force fictive $\overrightarrow{f_{ABC....M}}$ telle que $\overrightarrow{f_{ABC....M}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{F^{terre}_A} + \overrightarrow{F^{terre}_B} + \ldots \overrightarrow{F^{terre}_M}$

Son intensité est égale à la somme des poids des différents points matériels.

Centre de gravité d'un corps solide. C'est le point d'application G de la force fictive équipollente à la somme géométrique des actions mécaniques exercées par la terre sur les différents points matériels qui constituent le corps solide. Cette force fictive est appelée poids du corps.

Détermination géométrique de G.

Le corps possède un centre, un axe ou un plan de symétrie.

G est alors en ce centre, sur cet axe ou dans ce plan.

Applications.

G est au centre de symétrie pour : un segment de droite, carré, rectangle, losange, parallélogramme, polygone régulier, cercle, ellipse, cube, sphère.

G est sur l'axe de symétrie pour toute ligne, surface ou volume présentant un tel axe : arc de cercle, segment de cercle, surfaces et volumes de révolution.

G est dans le plan de symétrie pour tout corps présentant un tel plan : profilés I, profilés [, cornières à ailes égales, pylône en ciment, véhicule industriel à vide.

Le corps peut être décomposé en tranches parallèles dont les centres de gravité sont alignés.

G est alors sur cette droite.

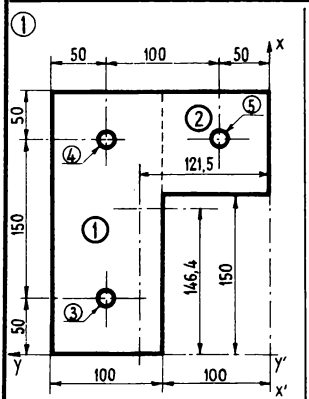
Fig. 2. **Surface d'un triangle :** G est sur chaque médiane donc à leur point de concours.

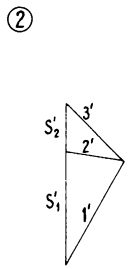
Fig. 3. **Surface d'un trapèze :** G est sur la droite qui joint les milieux des bases tel que $\frac{GM}{GN} = \frac{B + \frac{b}{2}}{b + \frac{B}{2}}$.

Fig. 4. **Pyramides et cônes :** G est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base opposée, au 1/4 de ce segment à partir de la base.

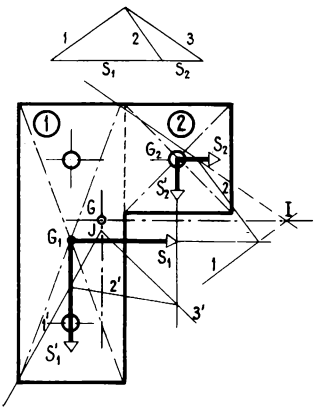
Remarque. Un corps pyramidal ou conique à axe vertical reposant sur sa base, a son centre de gravité situé à une distance de cette base 2 fois plus petite que celle d'un corps prismatique ou cylindrique d'axe vertical et de même hauteur.

CENTRE DE GRAVITÉ (2) — M. 40





$S_1 = 25000 - 50\pi$
$S_2 = 10000 - 25\pi$
Résultats
$x = 146{,}4$
$y = 121{,}5$



DÉTERMINATION ANALYTIQUE DE G

Décomposer le corps en éléments simples tels que l'on connaisse la position du centre de gravité de chacun de ces éléments.

Chacun est soumis à des forces parallèles fictives : poids.

Le moment de la résultante de ces poids est égal à la somme algébrique des moments de chacun d'eux.

Ces moments algébriques seront pris :

— par rapport à deux axes perpendiculaires pour une surface ;

— par rapport à trois axes perpendiculaires pour un volume.

Tenir compte des remarques suivantes :

1. Si le corps est homogène, le poids spécifique n'intervient pas ;

2. Si le corps présente un élément de symétrie un axe suffit (surface), deux axes sont nécessaires pour un volume ;

3. Si le corps présente un évidement, considérer comme négatif le poids de la partie évidée.

Application (fig. 1).

Déterminer le centre de gravité d'une plaque percée de trois trous ⌀ 10 *mm*.

Solution : Disposer ainsi les calculs (voir bas de page).

Méthode du funiculaire (fig. 2).

Le rectangle (1) a son centre de gravité en G_1 ; mener par G_1 les vecteurs $\overrightarrow{S_1}$ et $\overrightarrow{S'_1}$ parallèles aux axes et d'intensité $25\,000 - 50\,\pi$ à une échelle à indiquer sur le dessin.

Le rectangle (2) a son centre de gravité en G_2 ; mener par ce point les vecteurs $\overrightarrow{S_2}$ et $\overrightarrow{S'_2}$ respectivement parallèles et de même sens que $\overrightarrow{S_1}$ et $\overrightarrow{S'_1}$, d'intensité $10\,000 - 25\,\pi$ à la même échelle que précédemment.

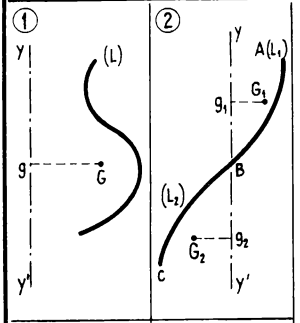
Construire les dynamiques et les funiculaires correspondants.

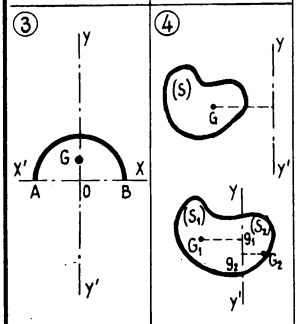
La parallèle à $\overrightarrow{S_1}$ et $\overrightarrow{S_2}$ passant par I et la parallèle à $\overrightarrow{S'_1}$ et $\overrightarrow{S'_2}$ passant par J se coupent en G, centre de gravité cherché.

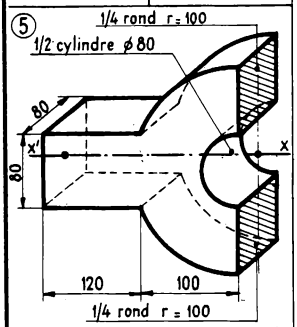
Surfaces	Distances à y'y	Distances à x'x	S · d(y'y)	S · d(x'x)
$S_1 = 25\,000 - 50\pi = 24\,843$	$x_1 = 125$	$y_1 = 150$	$S_1x_1 = 3\,105\,375$	$S_1y_1 = 3\,726\,450$
$S_2 = 10\,000 - 25\pi = 9\,922{,}5$	$x_2 = 200$	$y_2 = 50$	$S_2x_2 = 1\,984\,500$	$S_2y_2 = 496\,125$
$S_3 = 35\,000 - 75\pi = 34\,765{,}5$			$Sx = 5\,089\,875$	$Sx = 4\,222\,575$

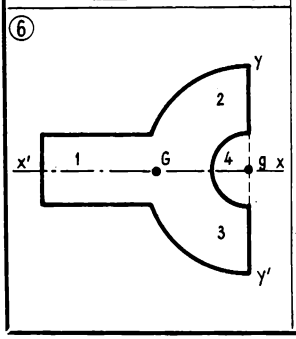
$$X = \frac{5\,089\,875}{34\,765{,}5} = 146{,}4\ mm \qquad Y = \frac{4\,222\,575}{34\,765{,}5} = 121{,}5\ mm.$$

M. 41 — CENTRE DE GRAVITÉ (3)









THÉORÈME DE GULDIN RELATIF AUX SURFACES (fig. 1).

La surface engendrée par une ligne plane tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne la coupant pas est égale au produit de la longueur L *de la ligne par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité.*

$$\boxed{S = 2\pi \times Gg \times L}$$

Si la ligne coupe l'axe, il faut évaluer séparément les surfaces engendrées par AB et BC (fig. 2).

$$S = 2\pi(G_1g_1 \times L_1 + G_2g_2 \times L_2)$$

Application.

Position du centre de gravité d'une demi-circonférence. G est sur l'axe de symétrie y'y (fig. 3).

Rotation autour de X'X, surface engendrée : surface sphérique

$S = 4\pi r^2$; $\quad L = \pi r$; $\quad 4\pi r^2 = 2\pi \times GO \times \pi r$;

$GO = \frac{2r}{\pi} \simeq 0{,}636\ r$

THÉORÈME DE GULDIN RELATIF AUX VOLUMES (fig. 4).

Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe situé dans son plan ne la traversant pas est égal au produit de l'aire de cette surface par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité

$$\boxed{V = 2\pi \times Gg \times S}$$

Si l'axe traverse la surface

$$V = 2\pi(G_1g_1 \times S_1 + G_2g_2 \times S_2)$$

Application.

Position du centre de gravité d'un demi-cercle (fig. 3). G est sur l'axe de symétrie.

Rotation autour de X'X, volume engendré : sphère.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = \frac{\pi r^2}{2}$, $\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi \times GO \times \frac{\pi r^2}{2}$, $GO = \frac{4r}{3\pi} \simeq 0{,}424r$.

Problème.

Déterminer le centre de gravité de la pièce en acier doux représenté par les figures 5 et 6.

Solution.

Calcul de l'aire de la section droite (fig. 6).

$$S = (80 \times 120) + \left(\frac{1}{2}\pi \times 100^2\right) - \left(\frac{1}{2}\pi \times 40^2\right) \simeq 30\,795\ mm^2.$$

Calcul du volume engendré par cette surface dans la rotation autour de y'y.

$$V = \pi(220^2 - 100^2) \times 80 + \left(\frac{4}{3}\pi \times 100^3\right) - \left(\frac{4}{3}\pi \times 40^3\right) = 4\,322\,000\,\pi.$$

Position du centre de gravité de la section (fig. 6).

$$V = 2\pi \times Gg \times S; \quad Gg = \frac{4\,322\,000\,\pi}{2\pi \times 30\,795} \simeq \mathbf{70{,}17}\ mm.$$

(L'intersection du rectangle et du demi-cercle a été assimilée à une droite, l'erreur est très faible.)

La pièce a 2 plans de symétrie qui se coupent suivant X'X, cet axe passe par le centre du carré et le centre des cylindres, sur cet axe G est à 220 — 70, 1 ≃ 149,9 *mm* du centre du carré.

Remarque.

L'épaisseur de la pièce n'intervient pas puisqu'elle est uniforme.

La nature du matériau n'intervient pas, le corps étant homogène.

L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE (I)

CONDITIONS ANALYTIQUES

M. 42

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE

Un système matériel est en équilibre si tous ses points matériels sont en équilibre séparément et réciproquement.

Conditions d'équilibre.

1. La somme géométrique des forces extérieures qui agissent sur chaque élément du système matériel doit être équipollente au vecteur neutre.

Soit $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \ldots + \overrightarrow{F_n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$ (1)

2. La somme algébrique des moments algébriques des forces extérieures, par rapport à un point quelconque A du plan des forces, ou du plan sur lequel on les projette doit être nulle.

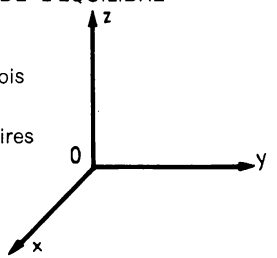
Soit $\mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{F_1}) + \mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{F_2}) + \ldots + \mathcal{M}_{alg}(A, \overrightarrow{F_n}) = 0$ (2)

Ces deux relations ne permettent pas oujours le calcul des intensités $F_1, F_2 \ldots F_n$.

CONDITIONS ANALYTIQUES DE L'ÉQUILIBRE

On rapporte le système matériel à trois axes de coordonnées perpendiculaires OX, OY, OZ.

On projette les forces sur les axes.



La relation (1) ci-dessus donne :

$$\overrightarrow{proj_{ox}}\,\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{proj_{ox}}\,\overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{proj_{ox}}\,\overrightarrow{F_n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{proj_{oy}}\,\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{proj_{oy}}\,\overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{proj_{oy}}\,\overrightarrow{F_n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{proj_{oz}}\,\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{proj_{oz}}\,\overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{proj_{oz}}\,\overrightarrow{F_n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

La relation (2) ci-dessus s'écrit alors :

$$\mathcal{M}_{alg}(Ox, \overrightarrow{F_1}) + \mathcal{M}_{alg}(Ox, \overrightarrow{F_2}) + \ldots + \mathcal{M}_{alg}(Ox, \overrightarrow{F_n}) = 0$$

$$\mathcal{M}_{alg}(Oy, \overrightarrow{F_1}) + \mathcal{M}_{alg}(Oy, \overrightarrow{F_2}) + \ldots + \mathcal{M}_{alg}(Oy, \overrightarrow{F_n}) = 0$$

$$\mathcal{M}_{alg}(Oz, \overrightarrow{F_1}) + \mathcal{M}_{alg}(Oz, \overrightarrow{F_2}) + \ldots + \mathcal{M}_{alg}(Oz. \overrightarrow{F_n}) = 0$$

CAS PARTICULIERS

Les forces sont concourantes.

Prendre pour origine des axes le point de concours des forces. Les conditions d'équilibre se réduisent à trois équations de projection.

$$\Sigma\ \overrightarrow{proj_{ox}}\,\overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\Sigma\ \overrightarrow{proj_{oy}}\,\overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\Sigma\ \overrightarrow{proj_{oz}}\,\overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

Les forces sont dans le même plan.

Le plan OX, OY sera le plan des forces.

Conditions d'équilibre :

$$\Sigma\ \overrightarrow{proj_{ox}}\,\overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\Sigma\ \overrightarrow{proj_{oy}}\,\overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\Sigma\ \mathcal{M}_{alg}(Oz, \overrightarrow{F}) = 0$$

Les forces sont parallèles.

Prendre OZ parallèle à la direction des forces.

Conditions d'équilibre :

$$\Sigma\ \overrightarrow{proj_{oz}}\,\overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\Sigma\ \mathcal{M}_{alg}(Ox, \overrightarrow{F}) = 0$$

$$\Sigma\ \mathcal{M}_{blg}(Oy, \overrightarrow{F}) = 0$$

Equilibre d'un solide ayant un point fixe.

Exemple : Articulation sphérique.

Au système des forces extérieures données, adjoindre l'action de contact $\overrightarrow{F}^{\,articulation}_{\,corps}$ $\left(\text{en abrégé } \overrightarrow{F}^{\,a}_{c}\right)$. L'origine sera le point fixe.

Conditions d'équilibre :

$$\Sigma\ \overrightarrow{proj_{ox}}\,\overrightarrow{F} + \overrightarrow{proj_{ox}}\,\overrightarrow{F^a_c} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\Sigma\ \overrightarrow{proj_{oy}}\,\overrightarrow{F} + \overrightarrow{proj_{oy}}\,\overrightarrow{F^a_c} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\Sigma\ \overrightarrow{proj_{oz}}\,\overrightarrow{F} + \overrightarrow{proj_{oz}}\,\overrightarrow{F^a_c} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$$

$$\Sigma\ \mathcal{M}_{alg}(Ox, \overrightarrow{F}) = 0$$

$$\Sigma\ \mathcal{M}_{alg}(Oy, \overrightarrow{F}) = 0$$

$$\Sigma\ \mathcal{M}_{alg}(Oz, \overrightarrow{F}) = 0$$

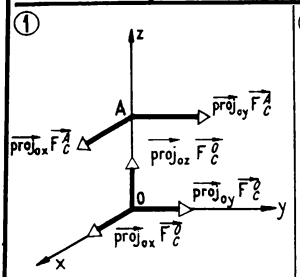
Les trois équations de moments algébriques définissent l'équilibre. Les trois équations de projection permettent de calculer F^a_c.

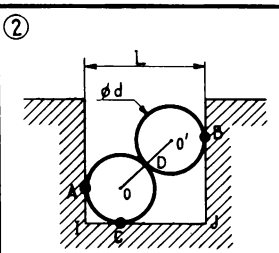
On a

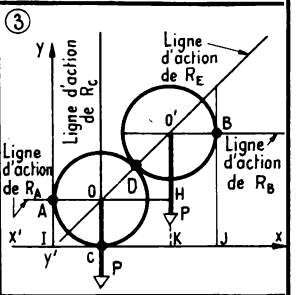
$$F^a_c = \sqrt{\left(proj_{ox}F^a_c\right)^2 + \left(proj_{oy}F^a_c\right)^2 + \left(proj_{oz}F^a_c\right)^2}$$

M. 43 L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE (2)

CONDITIONS ANALYTIQUES







Équilibre d'un corps solide ayant un axe fixe autour duquel il peut tourner. (Soit OZ cet axe) (fig. 1).

Exemple. La plupart des organes de machines.

Conditions d'équilibre :

$$\Sigma\, \mathcal{M}_{alg}\,(Oz, \vec{F}) = 0.$$

L'axe est défini par deux points dont l'un O sera l'origine, l'autre A à distance invariable. Il y a deux actions de contact :

$$F\,\frac{O}{C} \qquad \text{et} \qquad F\,\frac{A}{C}.$$

En O, trois composantes de $\overrightarrow{F\,\frac{O}{C}}$:

$$\overrightarrow{\text{proj}_{ox}\,F\,\frac{O}{C}}, \quad \overrightarrow{\text{proj}_{oy}\,F\,\frac{O}{C}}, \quad \overrightarrow{\text{proj}_{oz}\,F\,\frac{O}{C}}$$

En A, deux composantes seulement car OA invariable et pas de glissement sur l'axe :

$$\overrightarrow{\text{proj}_{ox}\,F\,\frac{A}{C}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{proj}_{oy}\,F\,\frac{A}{C}}$$

Equations d'équilibre :

$$\overrightarrow{\text{proj}_{ox}\,F\,\frac{O}{C}} + \overrightarrow{\text{proj}_{ox}\,F\,\frac{A}{C}} + \Sigma\,\overrightarrow{\text{proj}_{ox}\,F} \uparrow\uparrow \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{proj}_{oy}\,F\,\frac{O}{C}} + \overrightarrow{\text{proj}_{oy}\,F\,\frac{A}{C}} + \Sigma\,\overrightarrow{\text{proj}_{oy}\,F} \uparrow\uparrow \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{proj}_{oz}\,F\,\frac{O}{C}} + \Sigma\,\overrightarrow{\text{proj}_{oz}\,F} \uparrow\uparrow \vec{0}$$

$$\Sigma\, \mathcal{M}_{alg}\,(Ox, \vec{F}) + \mathcal{M}_{alg}\left(Ox, \overrightarrow{\text{proj}_{oy}\,F\,\frac{A}{C}}\right) = 0$$

$$\Sigma\, \mathcal{M}_{alg}\,(Oy, \vec{F}) + \mathcal{M}_{alg}\left(Oy, \overrightarrow{\text{proj}_{ox}\,F\,\frac{A}{C}}\right) = 0$$

$$\Sigma\, \mathcal{M}_{alg}\,(Oz, \vec{F}) = 0.$$

Elles permettent de calculer les cinq composantes des actions de contact.

Équilibre d'un solide pouvant tourner et glisser autour et sur un axe fixe OZ.

Conditions :

$$\Sigma\,\overrightarrow{\text{proj}_{oz}\,F} \uparrow\uparrow \vec{0} \quad \Big| \quad \Sigma\, \mathcal{M}_{alg}\,(OZ, F) = 0$$

Mêmes actions de contact que ci-dessus, mais pas de composantes suivant OZ. S'il y a glissement sans rotation (coulisseau sur glissière) une seule condition :

$$\Sigma\,\overrightarrow{\text{proj}_{oz}\,F} \uparrow\uparrow \vec{0}$$

Équilibre d'un solide pouvant se déplacer sur un plan fixe (OX, OY).

Conditions :

$$\Sigma\,\overrightarrow{\text{proj}_{ox}\,F} \uparrow\uparrow \vec{0}$$

$$\Sigma\,\overrightarrow{\text{proj}_{oy}\,F} \uparrow\uparrow \vec{0}$$

$$\Sigma\, \mathcal{M}_{alg}\,(OZ, \vec{F}) = \vec{0}$$

Application (fig. 2).

Deux conduites circulaires lisses de diamètre d et de poids p (*kgp/m*) sont placées dans une tranchée horizontale de section rectangulaire de largeur L ($d < L < 2d$) à parois verticales parfaitement lisses.

Déterminer les actions de contact des parois aux points où elles touchent les conduites.

Solution.

Forces de volume sur une longueur de 1 *m* $\quad -\overrightarrow{2P}$

Forces de contact (frottement nul) en A, B, C.

$\overrightarrow{R\ \substack{tranchée\\conduite}}$ soit $\overrightarrow{R_A}$ en A ; $\overrightarrow{R_B}$ en B ; $\overrightarrow{R_C}$ en C

Equilibre du système (fig. 3).

$$\overrightarrow{\text{proj}_{x'x}\,R_A} + \overrightarrow{\text{proj}_{x'x}\,R_B} + \overrightarrow{\text{proj}_{x'x}\,R_C} + \overrightarrow{\text{proj}_{x'x}\,P} + \overrightarrow{\text{proj}_{x'y}\,P} \uparrow\uparrow \vec{0}$$

ou $\quad R_A + R_B + 0 + 0 + 0 = 0$

ou $\quad R_A = -R_B$

$$\overrightarrow{\text{proj}_{y'y}\,R_A} + \overrightarrow{\text{proj}_{y'y}\,R_B} + \overrightarrow{\text{proj}_{y'y}\,R_C} + \overrightarrow{\text{proj}_{y'y}\,P} + \overrightarrow{\text{proj}_{y'y}\,P} \uparrow\uparrow \vec{0}$$

ou $\quad 0 + 0 + R_C - 2P = 0$

ou $\quad R_C = 2P$

$$\mathcal{M}_{alg}\,(I, \vec{R_A}) + \mathcal{M}_{alg}\,(I, \vec{R_B}) + \mathcal{M}_{alg}\,(I, \vec{R_C}) + \mathcal{M}_{alg}\,(I, \vec{P}) + \mathcal{M}_{alg}\,(I, \vec{P}) = 0$$

$$\text{ou} \quad -\frac{d}{2}\cdot R_A + JB\cdot R_B + \frac{d}{2}\cdot R_C - \frac{d}{2}P - IK\cdot P = 0$$

$$OH = L - d, \qquad IK = AH = L - \frac{d}{2}$$

$$O'H = \sqrt{d^2 - (L-d)^2} = \sqrt{2Ld - d^2}$$

$$JB = \frac{d}{2} + \sqrt{2Ld - d^2}$$

On trouve $R_A = \sqrt{2Ld - d^2} = (L - d)\,P$

$$\text{d'où} \quad R_A = \frac{(L-d)\cdot P}{\sqrt{2Ld - d^2}} = -R_B$$

$\overrightarrow{R_A}$ horizontale vers la droite.

$\overrightarrow{R_B}$ horizontale vers la gauche.

$\overrightarrow{R_C}$ verticale vers le haut, intensité 2P.

Ces actions de contact sont orientées à partir de l'appui vers la matière des conduites.

III

DYNAMIQUE

PRINCIPE FONDAMENTAL
MOMENT D'INERTIE
TRAVAIL ET PUISSANCE
ÉNERGIE MÉCANIQUE
MACHINES SIMPLES
QUANTITÉ DE MOUVEMENT
FORCE CENTRIFUGE
PENDULE

TABLEAU DES SYSTÈMES D'UNITÉS
(M. 49 et M. 50)

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE | M. 44

Proportionnalité : force à accélération.

En statique, la force se manifeste par une déformation d'un corps ; en dynamique elle se manifeste par la variation de son mouvement, donc par une accélération.

Le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ d'un point matériel a même ligne d'action et même sens que la résultante des forces qui agissent sur ce point ; l'intensité de l'accélération est proportionnelle à celle de la résultante.

$\frac{F}{\gamma} = i$ = constante = inertie du point matériel considéré ou

$$\boxed{F = i\gamma}$$

L'inertie caractérise la résistance qu'oppose un corps à son déplacement sous l'action d'une force.

Masse et inertie.

La masse d'un corps est proportionnelle à la quantité de matière qu'il contient. On la désigne par **m**.

L'action à distance de la Terre pour un corps de masse **m** est le poids $\vec{P}$ du corps qui, en chute libre, communique une accélération **g** à ce corps.

$$\boxed{P = mg}$$

La masse caractérise le poids si $\vec{F} = \vec{P}$ la relation $F = i\gamma$ devient $P = ig$ donc **i** et **m** (grandeurs différentes) ont mêmes valeurs numériques. La loi fondamentale est donc :

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{\gamma}}$$

Unités de masse volumique.

g/cm³ dans le système CGS (physiciens).
t/m³ dans le système MTS (légal).
kg/m³ dans le système MKS (international).

Dans le système industriel ou Mk_pS, on aura $m = 1$, si dans $P = mg$, on fait $P = 9{,}81$ *kgp*.
Cette unité vaut donc 9,81 *kg-masse/m³*, elle n'a pas reçu de nom dans ce système.

Principe de l'inertie.

Lorsqu'un point matériel n'est soumis à aucune force, son mouvement est rectiligne et uniforme, car si

$$\vec{F} = 0 \qquad \vec{\gamma} = 0$$

un élément matériel considéré seul dans l'espace ne peut pas prendre d'accélération.

Principe de causalité.

En deux lieux différents de l'espace, à deux instants différents, les mêmes phénomènes se reproduiront si les mêmes conditions sont réalisées.

Application. Une automobile se déplace sur une route rectiligne et horizontale à une vitesse de 72 *km/h*. En raison d'un danger subit le conducteur doit, en freinant brusquement, arrêter sa voiture sur une distance de 10 *m*. En supposant uniformément décéléré le mouvement pendant le freinage, calculer :

1. La décélération du véhicule ;

2. La force d'inertie s'exerçant sur une personne pesant 75 *kgp* assise dans la voiture ;

3. La distance sur laquelle devrait avoir lieu le freinage, terminé par l'arrêt, pour que la force d'inertie s'exerçant sur cette personne soit égale à son poids.

Solution.

1. **Calcul de la décélération.**

Vitesse de régime $v_0 = \frac{72\,000}{3\,600} = 20$ *m/s*.

Vitesse en mouvement décéléré :

$$v = \sqrt{v^2_0 - 2\gamma e}$$

Lors de l'arrêt $v = 0$

$$v^2_0 - 2\gamma e = 0$$

$$\gamma = \frac{v^2_0}{2e} = \frac{20^2}{2 \times 10} = 20 \text{ } m/s/s.$$

2. **Force d'inertie s'exerçant sur le passager :**

$$F = m\gamma = \frac{P}{g} \times \gamma = \frac{75}{9{,}81} \times 20 \simeq 153 \text{ } kgf.$$

Cette force pousse le passager vers l'avant de la voiture.

3. **Distance de freinage pour avoir F = P.**

$$F = m\gamma = P \quad \text{ou} \quad \frac{P}{g}\gamma = P$$

d'où $\gamma = g \simeq 9{,}81$

$$v^2_0 - 2\gamma e = 0 \qquad e = \frac{v^2_0}{2\gamma} = \frac{v^2_0}{2g}$$

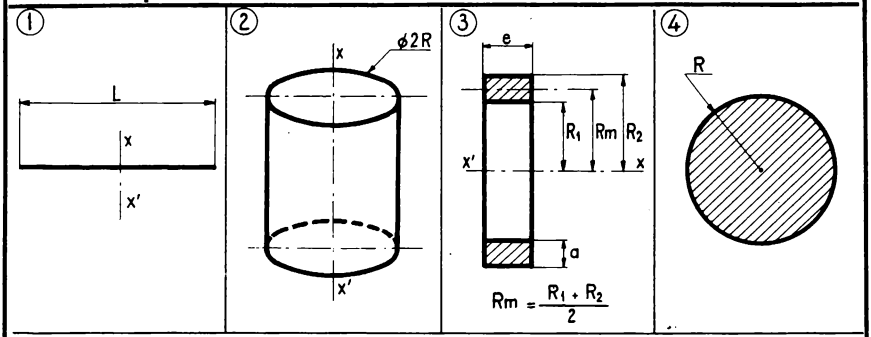
$$e = \frac{20^2}{2 \times 9{,}81} \simeq 20{,}4 \text{ } m.$$

Conséquence.

L'importance de l'intensité que peut avoir la force d'inertie montre le danger que peut présenter un mauvais arrimage ou un mauvais gerbage de colis, fûts, etc. sur un véhicule appelé à freiner brusquement. Mêmes conséquences en cas de démarrage brutal.

Cas de véhicules ayant de grandes accélérations au départ.

M. 45 — MOMENT D'INERTIE



MOMENT D'INERTIE POUR UN CORPS EN ROTATION

$\vec{F}$ étant la force tangentielle agissant sur une poulie d'axe X'X passant par son centre O, on a (voir M. 35) :

$\mathcal{M}_{alg}(x'x, \vec{F}) = \mathcal{M}_{alg}(O, \vec{F}) = \pm OH \cdot F.$

Si **r** est le rayon de la poulie, l'intensité du moment moteur est :

$$\mathcal{M} = rF = rm\gamma = mr^2 \frac{\gamma}{r}.$$

Mais $\frac{\gamma}{r} = \omega'$ (accélération angulaire)

donc $\boxed{\mathcal{M} = mr^2\omega'}$

- $F = m\gamma$; m conditionne l'inertie dans une translation sous l'action de F ;
- $\mathcal{M} = mr^2\omega'$; mr^2 conditionne l'inertie dans une rotation sous l'action de $\mathcal{M}$.
- $\boxed{mr^2 = i}$, moment d'inertie du point matériel en rotation.

Pour un corps solide composé de points matériels $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ situés à des distances $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ de l'axe de rotation, on a :

$$m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_nr_n^2 = \Sigma mr^2 = J$$

J = moment d'inertie du solide.

$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_2 = \Sigma m = M$

M = masse du solide

$\boxed{\mathcal{M} = J\omega'}$ $\qquad$ $\boxed{J = M\rho^2}$

ρ (rhô) = rayon de giration (rayon fictif donné par le calcul).

Application.

Un volant en fonte est utilisé comme régulateur de vitesse ; il peut être considéré comme réduit à sa jante.

Dimensions : ϕ extérieur 2 *m*, ϕ intérieur 1,80 *m* ; largeur 0,20 *m*. Vitesse de régime 240 *tr/mn*.

1. Quel est le moment du couple moteur constant qu'il faut appliquer pour obtenir cette vitesse de régime en 1 *mm*, le volant partant du repos ?

2. La vitesse étant 240 *tr/mn*, un couple constant résistant s'oppose à son mouvement en sorte qu'en 10 *s* la vitesse est descendue à 180 *tr/mn*.

Quelle est la valeur du couple résistant ?

Solution.

1. Calcul de J (poids volumique : 7,2 *kgp/dm³*).

$J = M\left(R^2_m + \frac{a^2}{4}\right)$ $\qquad$ $M = \frac{P}{g} = \frac{7{,}2V}{g}$

$V = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \times e = \frac{\pi(20^2 - 18^2)}{4} \times 2$

$= 120\ dm^3$ (unités en *dm*).

$P = 7{,}2 \times 120 = \mathbf{864}\ kgf.$

$J = \frac{864}{g}\left(0{,}95^2 + \frac{0{,}10^2}{4}\right)$ (dimensions en *m*).

$\simeq$ 80 unités *MKpS*.

Calcul de ω' $\qquad$ ($\omega = \omega' t$)

$\omega' = \frac{\omega}{t} = \frac{\pi n}{30t} = \frac{240\pi}{30 \times 60} = \frac{4\pi}{30}\ rd/s/s.$

Moment moteur :

$\mathcal{M} = J\omega' = 80 \times \frac{4\pi}{30} = \frac{32\pi}{3} \simeq \mathbf{33{,}5}\ m.kgf.$

2. Décélération angulaire ω'_1

$\omega'_1 = \frac{\omega_0 - \omega_1}{10} = \frac{\pi(n_0 - n_1)}{300} = \frac{60\pi}{300} = \frac{\pi}{5}\ rd/s/s.$

Moment résistant :

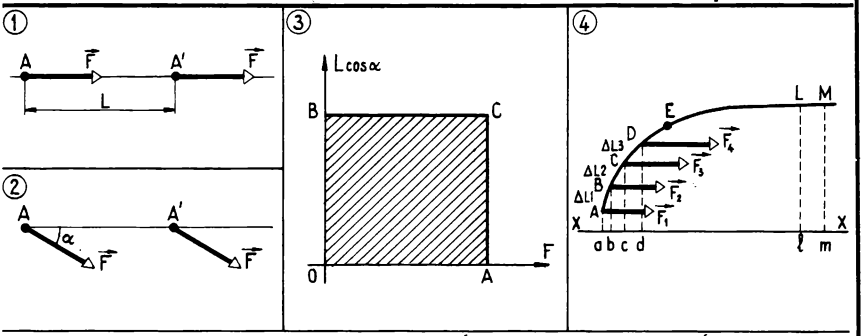
$\mathcal{M}_1 = J\omega'_1 = 80 \times \frac{\pi}{5} = 16\pi \simeq \mathbf{50}\ m.kgf.$

Quelques valeurs à retenir.

Fig. 1. **Barre homogène de faible section, tournant autour de son axe de symétrie : longueur L.**	Fig. 2. **Cylindre de révolution tournant autour de son axe** (poulie pleine).	Fig. 3. **Anneau cylindrique** (ou jante d'un volant) **tournant autour de son axe.**	Fig. 4. **Sphère pleine tournant autour d'un diamètre.**
$\rho^2 = \frac{L^2}{12}$	$\rho^2 = \frac{R^2}{2}$	$\rho^2 = R^2_m + \frac{a^2}{4}$	$\rho^2 = \frac{2}{5}R^2$
$J = \frac{ML^2}{12}$	$J = \frac{MR^2}{2}$	$J = M\left(R^2_m + \frac{a^2}{4}\right)$	$J = \frac{2}{5}MR^2$

TRAVAIL DES FORCES

M. 46



TRAVAIL D'UNE FORCE APPLIQUÉE A UN POINT MATÉRIEL

Il y a travail lorsque le point d'application d'une force, variable (ou non), se déplace.

Travail d'une force constante.

1. **Le déplacement a lieu suivant la direction de la force $\vec{F}$** (fig. 1).

$$\mathcal{T} = \vec{F} \cdot \vec{AA'} = F \cdot L$$

unité = kilogrammètre (kgm)

2. **Le déplacement et la force n'ont pas la même direction** (fig. 2).

$$\mathcal{T} = \vec{F} . \vec{AA'} \quad F \cdot L \cos (\vec{AA'}, \vec{F}) = F \cdot L \cos \alpha$$

$\mathcal{T} = 0$ si $\cos (\vec{AA'}, \vec{F}) = 0$

ou $(\vec{AA'}, \vec{F}) = \frac{\pi}{2}$; $\vec{F}$ est normale au déplacement.

$\mathcal{T} > 0$ si $\alpha < \pi/2$.

$\mathcal{T} < 0$ si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Le travail peut être représenté par la surface d'un rectangle (fig. 3). Indiquer les échelles de représentation.

a *mm* représente 1 *kgf*.
b *mm* représente 1 *m*.

OA = aF *(mm)*, OB = bL cos α *(mm)*.
S (OACB) = OA · OB = aF · bL cos α.
= ab · FL cos α = ab · $\mathcal{T}$ *(mm^2)*.

d'où $\mathcal{T} = \frac{1}{ab} \times$ S (OACB).

3. **Le déplacement a lieu suivant une courbe plane.**

Partager AM en éléments AB = ΔL_1, BC = ΔL_2, etc., assez petits pour confondre courbe et corde (fig. 4).

$\Delta\mathcal{T}_1 = F \cdot \Delta L_1 \cos \alpha_1$;
$\Delta\mathcal{T}_2 = F \cdot \Delta L_2 \cos \alpha_2$
etc.

$$\mathcal{T} = \Delta\mathcal{T}_1 + \Delta\mathcal{T}_2 + \ldots + \Delta\mathcal{T}_n$$
$$= F(\Delta L_1 \cos \alpha_1 + \Delta L_2 \cos \alpha_2 + \ldots + \Delta L_n \cos \alpha_n)$$

Si X'X est parallèle à la direction de $\vec{F}$

$\Delta L_1 \cos \alpha_1 = ab$; $\Delta L_2 \cos \alpha_2 = bc$; $\Delta L_n \cos \alpha_n = Lm$.

$\mathcal{T} = F(ab + bc + \ldots + Lm) = F \cdot am$.

F · am est le produit de l'intensité de la force par la longueur de la projection du déplacement sur une parallèle à la ligne d'action de $\vec{F}$.

Travail d'une force variable, déplacement quelconque (fig. 4).

Considérer la valeur moyenne de l'intensité de la force pendant un déplacement élémentaire Δl.

$$\mathcal{T} = F_1 \cdot \Delta L_1 + F_2 \cdot \Delta L_2 + F_3 \cdot \Delta L_3 \ldots$$

Travail de plusieurs forces appliquées simultanément au même point matériel.

Le travail total est égal à la somme algébrique des travaux de chaque force.

Cas particulier : Les forces sont constantes et le déplacement rectiligne.

$$\mathcal{T} = \vec{F_1} \cdot \vec{AA'} + \vec{F_2} \cdot \vec{AA'} + \vec{F_3} \cdot \vec{AA'}$$
$$= (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}) \cdot \vec{AA'}$$
$$= \vec{R} \cdot \vec{AA'} \quad \text{avec} \quad \vec{R} \uparrow\uparrow \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$

Application.

Une bille de poids **p** assimilable à un point matériel tombe d'une hauteur **h** suivant les trajectoires suivantes :

1. la verticale,
2. une droite inclinée d'un angle α sur la verticale,
3. une courbe quelconque.

Dans chaque cas évaluer le travail de la pesanteur.

Solution.

Force p verticale, sens : haut en bas.

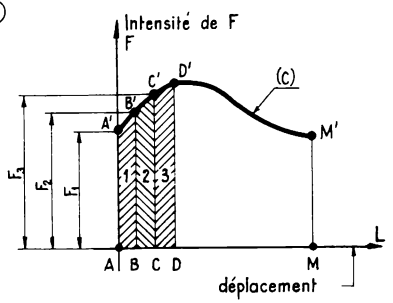
1re trajectoire :
$\mathcal{T} = p \cdot h$

2e trajectoire :
$\mathcal{T}$ = p × projection sur la verticale de la droite inclinée = p · h.

3e trajectoire :
$\mathcal{T}$ = p × projection sur la verticale de la courbe quelconque = p · h.

M. 47 TRAVAIL ET PUISSANCE

①



REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DU TRAVAIL D'UNE FORCE VARIABLE

On construit la courbe (C) des variations de l'intensité de $\overrightarrow{F}$ en fonction du déplacement L, **a** *mm* représentant 1 *kgf*.

Le déplacement L, représenté à l'échelle de **b** *mm* pour 1 *m*, est divisé en **n** parties égales suffisamment petites pour que les ordonnées correspondantes déterminent sur (C) des arcs pouvant être confondus avec leurs cordes (fig. 1). On obtient **n** trapèzes élémentaires.

$\Delta\mathfrak{T}_1 = \frac{1}{ab} \times$ surface du trapèze élémentaire AA'BB'.

$\mathfrak{T} = \frac{1}{ab} \Sigma$ surfaces AA'BB'

$= \frac{1}{ab} \times$ surface AA'MM'.

La formule de SIMPSON permet une évaluation approchée de l'aire.

$$S(AA'MM') = \frac{L}{n}\left(\frac{AA' + MM'}{2} + BB' + CC' + \ldots\right).$$

Travail moteur. C'est le travail des forces motrices ; c'est un travail positif.

Travail résistant. C'est le travail des forces résistantes ; il est négatif.

Travail d'un couple.

$$\boxed{\mathfrak{T} = \mathcal{M} \theta}$$

$\mathcal{M}$ = moment du couple en *mkgf*.
θ = angle de rotation en *rd*.

PUISSANCE

Puissance moyenne

$= \frac{\text{Travail effectué}}{\text{Temps mis à l'effectuer}}$.

$$\boxed{\mathcal{P}_{moy} = \frac{\mathfrak{T}}{t}}$$

si $t = 1$ on a $\mathcal{P} = \mathfrak{T}$

$\mathfrak{T}$ en *kgm*.
t en *s*.
$\mathcal{P}$ en *kgm/s* (75 *kgm/s* = 1 *ch*).

Puissance d'un couple.

La vitesse de rotation est supposée constante.

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}\omega \text{ (en } kgm/s) = \frac{\mathcal{M}\omega}{75} \text{ (en } ch),$$

Applications.

1. Calcul du moment moteur d'une poulie fournissant $\mathcal{P}ch$ à la jante vitesse de rotation N *tr/mn*.

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{M}\omega}{75} \quad \text{ou} \quad \mathcal{M} = \frac{75\mathcal{P}}{\omega} \quad \omega = \frac{\pi N}{30}$$

donc $\mathcal{M} = \frac{75 \times 30}{\pi} \times \frac{\mathcal{P}}{N}$ $\boxed{\mathcal{M} = \frac{716\,\mathcal{P}}{N}}$.

2. Calcul de la force tangentielle agissant sur cette poulie.

$$\mathcal{M} = F \times \frac{D}{2}; \quad F = \frac{2\mathcal{M}}{D} \qquad \boxed{F = \frac{1432\,\mathcal{P}}{DN}}.$$

D en *m* ; $\mathcal{P}$ en *ch* ; N en *tr/mn*.

Problème. Sur une voie ferrée rectiligne et horizontale et sous l'effet d'une force constante, un train de 400 tonnes atteint la vitesse de 90 *km/h* 75 secondes après le démarrage.

En admettant une résistance moyenne au roulement de 6 *kgf* par tonne, déterminer la puissance en *ch* développée par la motrice :

— pendant le démarrage ;
— pendant la période de régime 90 *km/h* en palier ;
— pendant la montée d'une rampe à 6°/₀₀ rectiligne, la vitesse étant toujours 90 *km/h*.

Solution.

1. **Période de démarrage.**

Effort de traction = force d'inertie + résistance au roulement.

$$T = M\gamma + R.$$

Calcul de γ :

$v = \frac{90\,000}{3\,600} = 25\ m/s$

$v = \gamma t \qquad \gamma = \frac{v}{t} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}\ m/s/s.$

$M = \frac{P}{g} = \frac{400\,000}{g}$; $R = 6 \times 400 = 2\,400\ kgf.$

$T = \left(\frac{400\,000}{g} \times \frac{1}{3}\right) + 2\,400 \simeq 16\,000\ kgf.$

$e = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 75^2 = 937{,}5\ m.$

$\mathcal{P}_{1moy} = \frac{16\,000 \times 937{,}5}{75} \simeq 200\,000\ kgm/s \simeq \mathbf{2\,667}\ ch.$

2. **Puissance développée en palier :**

$$\mathcal{P}_2 = \frac{2\,400 \times 25}{75} = \mathbf{800}\ ch.$$

3. **Puissance développée en côte :**

$$\mathcal{P}_3 = \left(2\,400 + \frac{400\,000 \times 6}{1\,000}\right) \times 25 \times \frac{1}{75} = \mathbf{1\,600}\ ch.$$

ÉNERGIE CINÉTIQUE ou ÉNERGIE D'UN CORPS EN MOUVEMENT.

L'énergie cinétique d'un point matériel en mouvement ayant à un instant donné une vitesse v est

$$W = \frac{1}{2} mv^2$$

v vitesse en *m/s*.
W en *kgm*.
m masse du point en *unités de masse MkpS*.

Cette grandeur est toujours positive.

Energie cinétique d'un solide = somme des énergies cinétiques des différents points matériels du solide.

Cette énergie provient du travail emmagasiné dans le corps par une force $\vec{F}$ qui a communiqué à ce corps de masse $m = \frac{P}{g}$ une vitesse v (P en *kgp*).

Réciproquement : Le travail des forces résistantes appliquées à ce corps qui annuleraient la vitesse de tous ses points, serait égal à l'énergie cinétique, changée de signe.

Corps en mouvement de translation.

Tous les points ont même vitesse v

$$W = \frac{1}{2} m_1v^2 + \frac{1}{2} m_2v^2 + \frac{1}{2} m_3v^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)v^2$$

$$W = \frac{1}{2} Mv^2$$

Corps en mouvement de rotation.

$$W = \frac{1}{2} m_1v^2_1 + \frac{1}{2} m_2v^2_2 + \frac{1}{2} m_3v^2_3 + \ldots)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1\omega^2r^2_1 + m_2\omega^2r^2_2 + m_3\omega^2r^2_3 + \ldots)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1r^2_1 + m_2r^2_2 + m_3r^2_3 + \ldots)\omega^2$$

$$W = \frac{1}{2} J\omega^2$$

Corps en mouvement hélicoïdal.

v = vitesse de translation.
ω = vitesse de rotation.
U = vitesse résultante.

$$U^2 = v^2 + \omega^2r^2$$

$$W = \Sigma \frac{1}{2} mU^2 = \Sigma \frac{1}{2} m(v^2 + \omega^2r^2)$$

$$W = \Sigma \frac{1}{2} mv^2 + \Sigma \frac{1}{2} m\omega^2r^2$$

$$W = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$$

Exemple. Energie cinétique d'un camion roulant à 72 *km/h* ; poids, charge comprise, 10 tonnes.

$$v = \frac{72\,000}{3\,600} = 20\ m/s ; \quad M = \frac{10\,000}{g} \simeq 1\,020$$

$$W = \frac{1}{2} \times 1\,020 \times 20^2 = 204\,000\ kgm.$$

Relation entre travail et énergie cinétique.

Point matériel soumis à force constante $\vec{F}$, déplacement dans la direction de la force.

F = mγ, donc γ constante, mouvement uniformément accéléré.

Au temps t_1 on a $e_1 = \frac{1}{2} \gamma t^2_1$.

Au temps t_2 $\quad e_2 = \frac{1}{2} \gamma t^2_2$.

Travail de F entre t_2 et t_1 :

$$\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 = F(e_2 - e_1)$$

$$= F\left(\frac{1}{2} \gamma t^2_2 - \frac{1}{2} \gamma t^2_1\right)$$

$$= \frac{F}{2\gamma} (\gamma^2t^2_2 - \gamma^2t^2_1)$$

$$= \frac{1}{2} m(v^2_2 - v^2_1) = \frac{1}{2} mv^2_2 - \frac{1}{2} mv^2_1$$

$$\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 = W_2 - W_1$$

L'accroissement d'énergie cinétique pendant un intervalle de temps est égal au travail de la force durant ce temps.

ÉNERGIE POTENTIELLE

Un système mécanique possède de l'énergie potentielle lorsqu'il est capable de fournir du travail (bien que pouvant être en repos) en raison de son état actuel.

Exemples :

1. Corps de poids P immobile à une hauteur h au-dessus du sol.
Energie potentielle $W_p = Ph = mgh$.

2. Ressort, tendu ou comprimé, peut, en reprenant sa position initiale faire un certain travail.

Energie potentielle $W_p = \frac{1}{2} Ff$.

F. force de compression ou tension.
f. flèche (déplacement de l'extrémité libre).

3. Gaz ou vapeur à haute pression peuvent, en se détendant, effectuer du travail (moteurs à explosion, machines à vapeur). Le calcul du travail se fait en thermodynamique.

Conservation de l'énergie.

Dans un système isolé (système sur lequel n'agit aucune force extérieure) l'énergie mécanique totale (somme des énergies cinétique et potentielle) est à chaque instant constante, s'il n'y a pas de frottement.

Exemple : Corps tombant en chute libre dans le vide.

M. 49 — SYSTÈMES D'UNITÉS (I)

SYSTÈMES L. M. T.

Longueur. Masse. Temps.

GRANDEURS	SYMBOLE	FORMULE	DIMENSION	SYSTÈME C.G.S. (physiciens) — Unités fondamentales	SYMB.	SYSTÈME M.T.S. (légal) — Unités fondamentales	SYMB.	
LONGUEUR	...	.....	L	*centimètre*	*cm*	*mètre*.....	*m*	1
MASSE	...	.....	M	*gramme*	*g*	*tonne*.....	*t*	2
TEMPS	...	.....	T	*seconde*.....	*s*	*seconde*.....	*s*	3
				Unités dérivées		***Unités dérivées***		
AIRE.....	S	L.L	L^2	*centimètre carré*	cm^2	*mètre carré*.....	m^2	4
VOLUME	V	.....	L^3	*centimètre cube.*	cm^3	*mètre cube*	m^3	5
MASSE VOLUMIQUE...	ρ	M : V	ML^{-3}	*gramme par* cm^3	g/cm^3	*tonne par mètre cube*	t/m^3	6
ANGLE	α	.....	.....	*radian*	*rd*	*radian*.....	*rd*	7
VITESSE LINEAIRE	v	L : T	LT^{-1}	*centimètre par seconde*	*cm/s*	*mètre par seconde*.....	*m/s*	8
VITESSE ANGULAIRE ..	ω	α : T	.....	*radian par seconde*	*rd/s*	*radian par seconde*	*rd/s*	9
ACCELERATION LINEAIRE	γ	.....	LT^{-2}	*centimètre par (s) par (s)* ..	*cm/s/s*	*mètre par (s) par (s)*.....	*m/s/s*	10
ACCELERATION ANGULAIRE ...	ω'	.....	.....	*radian par (s) par (s)*.....	*rd/s/s*	*radian par (s) par (s)*.....	*rd/s/s*	11
FORCE	F	M.γ	MLT^{-2}	**dyne**	.....	**sthène**	*sn*	12
PRESSION	p	F : S	$ML^{-1}T^{-2}$	*barye* = 1 *dyne par* cm^2	.....	*pièze* = 1 sn/m^2.	*pz*	13
TRAVAIL	𝔈	F.L	ML^2T^{-2}	*erg* = 1 *dyne* × 1 *cm*.....	.....	*kilojoule* = 1 *sn* × 1 *m*	*kJ*	14
PUISSANCE	𝔓	𝔈 : T	ML^2T^{-3}	*erg par seconde*	.....	*kilowatt* = 1 *kJ/s*.....	*kW*	15
MOMENT DE FORCE.....	𝔐	L.F	ML^2T^{-2}	*centimètre-dyne*	.....	*mètre-sthène*	*m.sn*	16
MOMENT D'INERTIE	J	.....	ML^2	*gramme-centi-mètre carré* ..	$g.cm^2$	*tonne-mètre carré*.....	$t.m^2$	17
COEFFICIENT DE VISCOSITE ABSOLUE.....	μ	.....	$ML^{-1}T^{-1}$	poise = $\frac{1\ dyne \times 1s}{1\ cm^2}$	P_0	$\frac{1\ sn \times 1s}{1\ m^2}$	.....	18
COEFFICIENT DE VISCOSITE CINEMATIQUE .	ν	u : ρ	L^2T^{-1}	stoke = $\frac{1\ poise}{1\ g/cm^3}$ = $\frac{1\ barye \times 1s}{1\ g/cm^3}$ = $1\ cm^2 \times 1s$	*sk*	$\frac{1\ pz \times 1s}{1\ t/m^3}$ soit $1\ m^2 \times 1s$	.....	19

UNITÉS USUELLES ET AUXILIAIRES

(voir aussi DOC. 3)

Travail : *kilowatt-heure (kWh), hWh, Wh*

Puissance : *Cheval (ch)*

Pression : *bar, millibar, hpz, kgf/cm²*

Energie calorifique :
thermie (th), calorie-kilogramme (kcal), calorie-gramme (gcal)
ou grande calorie — *ou petite calorie*
ou millithermie (mth) — *ou microthermie (μth)*

Unités de masse

1 unité de masse M kp S
= 9,81 *kg* (unité MKS)
= 9,81 × 10^{-3} *t* (unité MTS)
= 9,81 × 10 *g* (unité CGS)
1 t = 10^3 *kg* = 10^6 *g*
1 *kg* = 10^3 *g*

SYSTÈMES D'UNITÉS (2)

L. M. T. (suite)

SYSTÈME M.K.S. (GIORGI) *(international)*

	Unités fondamentales	SYMB.
1	*mètre*	*m*
2	*kilogramme*	*kg*
3	*seconde*	*s*
	Unités dérivées	
4	*mètre carré*	m^2
5	*mètre cube*	m^3
6	*kilogramme par* m^3	kg/m^3
7	*radian*	*rd*
8	*mètre par seconde* ..	m/s
9	*radian par seconde* .	rd/s
10	*mètre par* (s) *par* (s)	$m/s/s$
11	*radian par*(s)*par*(s)	$rd/s/s$
12	Newton	*N*
13	*Pascal* = 1 N/m^2 ..	*P*
14	*Joule* = 1 $N \times 1\ m$	*J*
15	*Watt* = 1 J/s	*W*
16	*mètre-Newton*	*m.N*
17	*kilogramme-mètre carré*	$kg.m^2$
18	$\frac{1N \times 1s}{1m^2}$	
19	$\frac{1P \times 1s}{1kgm/m^3}$ soit $1m^2 \times 1s$.	

Remarque. Un même nombre N peut indiquer **soit la masse** (en *kg*) d'un corps dans le système MKS **soit le poids** (en *kgo* ou *kgf*) du même corps dans le système M kp S.

Conséquence. Lorsque dans un problème on donne une **force** ou un **poids** (le corps pèse) en *kg* (ou en *t*) il s'agit de *kgf* ou de *kgp* (ou de *tf*), il faut donc diviser le nombre donné en *kg* par g (= 9,81) pour avoir la **masse** en unités de masse M kp S.

SYSTÈME L. F. T.
Longueur. Force. Temps.

SYSTÈME M. Kp. S. *(Mécaniciens)*

GRANDEURS	*Unités fondamentales*	SYMB.	DIMENSION
LONGUEUR	*mètre*	*m*	L
FORCE	*kilogramme-force*	*kgf*	F
TEMPS	*seconde*	*s*	T
	Unités dérivées		
AIRE	*mètre carré*	m^2	L^2
VOLUME	*mètre cube*	m^3	L^3
POIDS VOLUMIQUE ..	$\frac{P}{V}$ *kgf par* m^3	kgf/m^3	FL^{-3}
ANGLE	*radian*	*rd*	
VITESSE LINEAIRE	*mètre par seconde*	m/s	LT^{-1}
VITESSE ANGULAIRE ...	*radian par seconde*	rd/s	
ACCELERATION LINEAIRE	*mètre par*(s) *par* (s)	$m/s/s$	LT^{-2}
ACCELERATION ANGULAIRE	*radian par*(s)*par*(s)	$rd/s/s$	
MASSE ..	$\frac{F}{\gamma}$ *(unité sans nom)*		$FL^{-1}T^{-2}$
PRESSION	*(unité sans nom)*	kgf/m^2	FL^{-2}
TRAVAIL	*kilogrammètre*	*kgm*	FL
PUISSANCE	*kilogrammètre par* (s)	kgm/s	FLT^{-1}
MOMENT DE FORCE	*mètre-kilogramme-force*	*m.kgf*	FL
MOMENT D'INERTIE	*(unité sans nom)*		FLT^{-2}
COEFFICIENT DE VISCOSITE ABSOLUE	$\frac{1\ kgf \times 1s}{1\ m^2}$		$FL^{-2}T$
COEFFICIENT DE VISCOSITE CINEMATIQUE...	*en* m^2s		L^2T^{-1}

ÉQUIVALENCE ENTRE CERTAINES UNITÉS
(à savoir par cœur)

Force

10^5 *dynes* = 1 *sn* = 10^3 *N* ≃ 102 *kgf* (1 *kgf* = 9,81 *N*)

Travail

10^{10} *ergs* = 1 *kJ* = 10^3 *J* ≃ 102 *kgm*

soit : 1 *kgm* = 9,81 *J* 1 *Wh* = 3 600 *J*

Puissance

10^{10} *ergs/s* = 1 *kW* = 10^3 *W* ≃ 102 *kgm/s*

soit : 1 *kgm/s* = 9,81 *W*; 1 *ch* = 75 *kgm/s* = 736 *W*

Pression

10^4 *baryes* = 1 *pz* = 10^3 *P* ≃ 102 kgf/m^2

soit : 1 kgf/m^2 = 9,81 *P* 1 kgf/cm^2 = 10^4 kgf/m^2

1 *bar* = 10^3 *millibars* = 10^6 *baryes* = 1 *kpz* ≃ 1,0194 kgf/cm^2

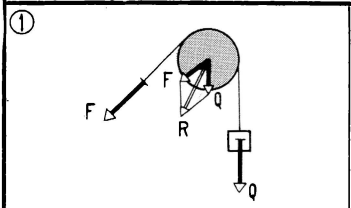
1 *atm.* (système métrique) = 1 kgf/cm^2

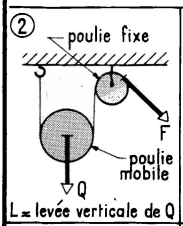
1 *atm.* (unité anglaise) = 760 *mm* de Hg = 1,033 kgf/cm^2

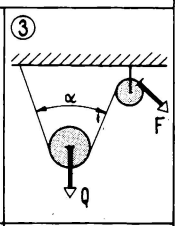
Énergie calorifique

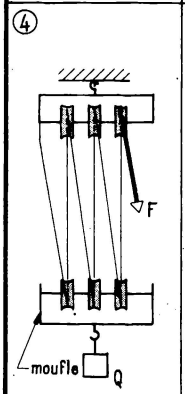
1 *kcal* = 4 180 *J* = 427 *kgm*.

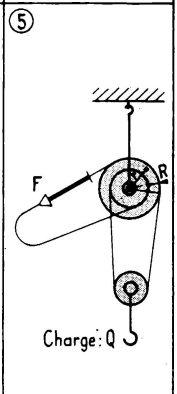
M. 51 MACHINES SIMPLES (I)

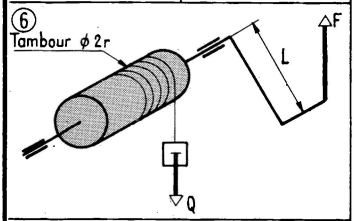


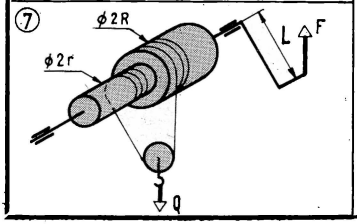












CONSERVATION DU TRAVAIL

Une machine simple est un système mécanique destiné à transformer un travail, dit travail moteur $\mathfrak{T}_m$, en un autre travail, dit travail résistant $\mathfrak{T}_r$.

Dans toute machine simple en mouvement uniforme $\mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_r = W_2 - W_1 = 0$ (puisque v constant) donc $\mathfrak{T}_m = \mathfrak{T}_r$.

Le travail moteur est égal au travail résistant.

Théorème des travaux virtuels.

Le travail des forces de liaison dans un déplacement réel ou virtuel est nul, si l'on néglige les frottements.

Lorsqu'un système matériel est en équilibre la somme algébrique des travaux des forces directement appliquées est nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons, et réciproquement.

Applications aux machines simples.

Poulie fixe (fig. 1).

Déplacement virtuel : un tour

$\mathfrak{T}_m = F \cdot 2\pi r$; $\mathfrak{T}_r = -QL = -Q \cdot 2\pi r$

$\mathfrak{T}_m + \mathfrak{T}_r = 0$; $F \cdot 2\pi r - Q \cdot 2\pi r = 0$ $\boxed{F = Q}$

Réaction de l'axe

$R = \sqrt{F^2 + Q^2 + 2FQ \cos (F, Q)} = F\sqrt{2\,[1 + \cos (F, Q)]}$

Poulie mobile.

Déplacement virtuel : un tour de poulie fixe

1° Les brins sont parallèles (fig. 2).

$\mathfrak{T}_m = F \times 2\pi r$ $\mathfrak{T}_r = -Q \cdot L$ et $\boxed{F = \frac{Q}{2}}$

$F \cdot 2\pi r - Q \cdot L = 0$, donc $L = \pi r$

2° Les brins font entre eux l'angle α (fig. 3).

$2F \cos \frac{\alpha}{2} - Q = 0$ $\boxed{F = \frac{Q}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} > \frac{Q}{2}}$

Palan ordinaire (fig. 4).

n = nombre de poulies par moufle ; brins sensiblement parallèles.

$F \times 2\pi r - QL = 0$ $\boxed{F = \frac{Q}{2n}}$ $L = \frac{2\pi r}{2n} = \frac{\pi r}{n}$

La charge monte d'une hauteur 2π fois moindre que la longueur tirée du brin libre.

Palan différentiel de Weston (fig. 5).

$F \cdot 2\pi R - \frac{Q}{2} \cdot 2\pi R + \frac{Q}{2} \cdot 2\pi r = 0$

$\boxed{F = Q \cdot \frac{R - r}{2R}}$

Pour un tour : $F \cdot 2\pi R - QL = 0$ d'où $L = \pi(R - r)$.

Treuil simple (fig. 6).

$F \cdot 2\pi L - Q \cdot 2\pi r = 0$ $\boxed{F = Q \cdot \frac{r}{L}}$

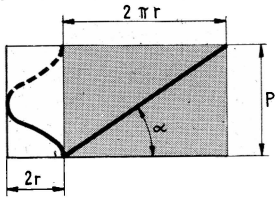
Treuil différentiel (fig. 7).

Brins sensiblement parallèles.

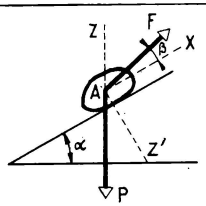
$F \cdot 2\pi L - \frac{Q}{2} \cdot 2\pi R + \frac{Q}{2} \cdot 2\pi r = 0$ $\boxed{F = Q \cdot \frac{R - r}{2L}}$

MACHINES SIMPLES (2) — M. 52

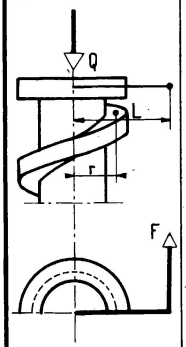
②



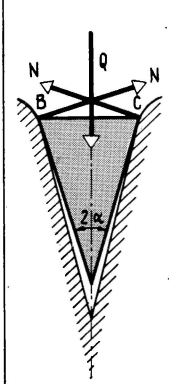
③



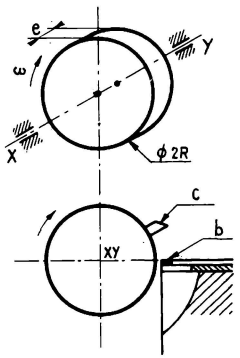
①



④



⑤



Vis (fig. 1 et 2).

Déplacement virtuel un tour.

$$F\,2\pi L - Qp = 0; \qquad p = \text{pas}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{2\pi r} \qquad \boxed{F = Q \times \frac{p}{2\pi L}}$$

Soit une vis au pas de 2 *mm*, manœuvrée avec une clé de longueur 20 *cm*. On aurait (sans frottement)

$$F = Q \times \frac{2}{400\pi} \simeq Q \times 0{,}0016 \text{ ou } Q \simeq 628\ F.$$

Plan incliné (fig. 3).

Déplacement L suivant la ligne de plus grande pente ;
mouvement uniforme, pas de frottement. Ce déplacement correspond à une montée verticale $h = L \sin \alpha$.

$$Ph - FL\cos\beta = 0$$

$$PL\sin\alpha - FL\cos\beta = 0 \qquad \boxed{F = P\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}}$$

F minimum pour $\cos\beta = 1$; $\beta = 0$; $F = P\sin\alpha$. $\widehat{(XAZ')}$.

F maximum pour $\cos\beta = 0$; $\beta = -90°$

F est alors ∞, il y a arc-boutement.

Si $\beta = 90 - \alpha$, F est verticale dirigée vers le haut, $\sin\alpha = \cos\beta$ et $F = P$.

Coin (fig. 4).

Frottement négligé. Déplacement vertical **h**.

$$Q \cdot h - 2Nh\cos(90 - \alpha) = 0$$

$$\boxed{Q = 2N\sin\alpha}$$

Application 1. Un cylindre circulaire plein en fonte, d'axe horizontal XY, $\varnothing = 2R = 40\ cm$, épaisseur $e = 4\ cm$, poids spécifique $\varpi = 7{,}2\ kgp/dm^3$ (fig. 5), constitue la partie tournante d'un mouton de Guillery, dans lequel un couteau **C**, de poids négligeable, lié au cylindre rompt un barreau **b** placé horizontalement sur 2 appuis. Avant rupture la vitesse de rotation était 900 *tr/mn*, après rupture elle est 600 *tr/mn*. Evaluer le travail cédé par le cylindre pour cette rupture en négligeant tous les frottements, déformations ou échauffement.

Solution.

Moment d'inertie du cylindre

$$J = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\varpi \times \pi R^2 e \left(\frac{R}{10}\right)^3$$

(R et e étant en *dm*) $J \simeq 0{,}723$ *unités MKpS*.

Energie perdue par le cylindre après rupture du barreau

$$\omega_1 = \frac{900\pi}{30} = 30\pi$$

$$W_1 - W_2 = \frac{1}{2}J(\omega^2_1 - \omega^2_2) \qquad \omega_2 = \frac{600\pi}{30} = 20\pi$$

$$W_1 - W_2 = \frac{1}{2} \times 0{,}723\,(900\pi^2 - 400\pi^2) \simeq \mathbf{1807}\ kgm$$

(travail absorbé pour couper le barreau).

Application 2. Un wagon pesant 15 tonnes part sans vitesse initiale appréciable du haut d'une rampe de 10 °/₀₀ dans une gare de triage. Après 100 *m* de parcours il heurte les tampons du dernier wagon d'une rame immobile. Quelle est l'énergie qu'il possède à cet instant ?

$$W = \frac{1}{2}Mv^2;\ M = \frac{15\,000}{g};\ v = \sqrt{2\gamma e};\ \frac{F}{\gamma} = \frac{P}{g};$$

$$\gamma = \frac{Fg}{P};\ F = P\sin\alpha;\ F = 15\,000 \times \frac{10}{1\,000} = 150$$

d'où $\gamma = \frac{g}{100}$; $v^2 = 2g$; $W = \mathbf{15\,000}\ kgm$.

M. 53 QUANTITÉ DE MOUVEMENT – IMPULSION

QUANTITÉ DE MOUVEMENT

La quantité de mouvement d'un solide de masse **m**, animé d'un mouvement de translation de vitesse **v** est donnée par l'expression $\boxed{Q = mv.}$

Unités... { *g.cm/s* en CGS. ; *t.m/s* en MTS. ; *kgf.s* en MKpS. ; *kg.m/s* en MKS.

IMPULSION

L'impulsion I communiquée à un solide par une force F est égale à l'accroissement de la quantité de mouvement du corps. Entre les temps t_2 et t_1 où les vitesses sont v_2 et v_1, on a :

$$I = mv_2 - mv_1 = Q_2 - Q_1 = F(t_2 - t_1)$$

Application. Une locomotive de manœuvre exerce sur un wagon pesant 20 *t*, en voie rectiligne et horizontale, une poussée de 100 *kgf*. En supposant les frottements nuls, pendant combien de temps la locomotive doit-elle exercer sa poussée pour communiquer au wagon une vitesse de 10,8 *km/h*.

Solution.

$$m = \frac{20\,000}{g} \qquad v = \frac{10\,800}{3\,600} = 3\ m/s.$$

$$F = 100\ kgf \qquad I = F(t_2 - t_1).$$

Au départ $t_1 = 0$ $I = Ft_2 = mv$.

$$t_2 = \frac{mv}{F} = \frac{20\,000 \times 3}{g \times 100} = \frac{600}{g} \simeq 61{,}2\ s$$

soit environ **1** *mn*.

Recul des armes à feu :

m masse du projectile.
M masse du canon.
V vitesse du projectile à la sortie.
v vitesse de recul du canon.

La détonation de la charge communique des impulsions égales et de sens contraires à l'obus et au canon :

$$mV = Mv$$

$$v = \frac{m}{M} V$$

Exemple :

$$p = 45\ kgp \qquad m = \frac{45}{g}$$

$$P = 6\,000\ kgp \qquad M = \frac{6\,000}{g}$$

$$V = 500\ m/s$$

$$v = \frac{45}{6\,000} \times 50 = 3{,}75\ m/s.$$

Nécessité d'un frein et d'un ancrage.

Problème général.

Un avion en vol horizontal et rectiligne se déplace à 540 *km/h*. Il a, à son bord, un parachutiste qui, avec son équipement pèse 80 *kgp* (poids P).

1. Calculer l'énergie cinétique du parachutiste, lorsqu'il s'apprête à sauter.
2. Au départ, le parachute est fermé ; en négligeant la résistance de l'air, quelle est la trajectoire du centre de gravité G du parachutiste ? Quelle est son équation ? Indiquer la position du parachutiste, par rapport au départ, après 10 *s* de chute ; quelle est alors sa vitesse ? (prendre g = 10 *m/s/s*).
3. Par suite de la résistance de l'air la trajectoire devient rapidement verticale et la vitesse du parachutiste devient constante ; quelle est la valeur numérique de la résistance de l'air R ?
4. La vitesse limite verticale du parachutiste est de l'ordre de 300 *km/h* ; elle est de la forme $R = kV^2$. Calculer k.
   Calculer le travail de R, pour 1 000 *m* de chute.
5. Dès que le parachute s'ouvre la nouvelle vitesse limite v_1 est atteinte rapidement. On a alors $R = 3{,}2\ v^2_1$. A quelle altitude s'est produite l'ouverture du parachute, la durée de descente, parachute ouvert, étant 10 *mn*.

Solution.

1. 540 *km/h* → 150 *m/s*.

$$W = \frac{1}{2} Mv^2_0 = \frac{1}{2} \times \frac{80}{g} \times 150^2 = \mathbf{90\ 000}\ kgm$$

2. $x = v_0 t$ $y = \frac{1}{2} gt^2$ d'où $y = \frac{gx^2}{2v^2_0}$

$$y = \frac{x^2}{4\,500} \qquad \textbf{parabole.}$$

Après 10 *s* $x = 150 \times 10 = 1\,500\ m.$

$$y = \frac{1}{2} g \times 10^2 = \mathbf{500}\ m.$$

v horizontale $= v_0 = 150\ m/s.$

v verticale $= gt = 100\ m/s.$

$$v = \sqrt{150^2 + 100^2} \simeq \mathbf{180}\ m/s.$$

3. Le mouvement devient rectiligne et uniforme $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} \uparrow\downarrow \overrightarrow{0}$; $R = \mathbf{80}\ kgf.$

4. Calcul de **k**.

$$R = kv^2 = 80 \ ; \quad k = \frac{80}{v^2} \ ; \quad v = \frac{250}{3}\ m/s$$

$$k = \mathbf{0{,}011\ 25}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} \times \frac{80}{g} \times \left(\frac{250}{3}\right)^2 = \frac{25\,0000}{9}$$

$$W_1 - W_0 = \frac{250\,000}{g} - 90\,000 = -62\,222\ kgm$$

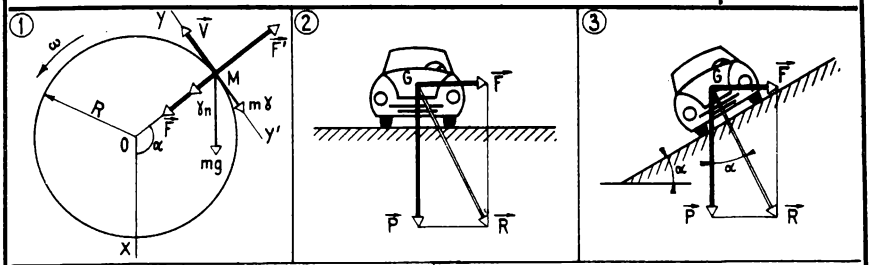
$$W_1 - W_0 = Ph + \mathcal{C} \ ;$$

$$\mathcal{C} = -62\,222 - 80\,000 = \mathbf{-142\ 222}\ kgm.$$

5. $R = 3{,}2V^2_1 = 80$; $v_1 = \sqrt{\frac{80}{3{,}2}} = 5\ m/s$;

$$h = 5 \times 600 = \mathbf{3\,000}\ m$$

FORCE CENTRIFUGE



FORCE CENTRIPÈTE

Un point matériel M de masse m décrit d'un mouvement uniforme une circonférence de rayon R (fig. 1).

Accélération tangentielle $\gamma_t = 0$.

Accélération normale $\gamma_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$.

M est donc soumis à une force $F = \gamma_n m$ ou $F = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$, de même sens que γ_n, donc centripète (dirigée vers le centre).

FORCE CENTRIFUGE

C'est une force d'inertie : $\overrightarrow{F'} \uparrow\uparrow -\overrightarrow{F}$.

M reste donc à distance constante de 0.

Intensité $\boxed{F' = m\omega^2 R = m\frac{v^2}{R}}$

Applications.

Tenue du véhicule dans un virage

Le véhicule (fig. 2) est soumis à son poids $\overrightarrow{P}$ vertical vers le bas, et à la force centrifuge $\overrightarrow{F}$ horizontale. On a : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{R}$.

Pour éviter les inconvénients qui peuvent résulter de l'obliquité de $\overrightarrow{R}$ par rapport à la voie (dérapage, renversement), on relève le bord extérieur du virage de façon que la voie se rapproche de la perpendiculaire à $\overrightarrow{R}$ (fig. 3). Soit α l'angle de relevage :

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{F}{P} = \frac{mv^2}{rP} = \frac{P}{g}\frac{v^2}{rP} = \frac{v^2}{gr}$$

r = rayon de courbure du virage.

Tension d'un fil lié à un point matériel en rotation.

La rotation n'est pas uniforme. Forces : p = mg ; T = tension du fil; force d'inertie dont les composantes sont (fig. 1) :

1. *Force centrifuge.* — $\frac{mv^2}{L}$.
2. *Force tangentielle d'inertie.* — $m\gamma$.
3. *Proj sur y'y.* $mg \sin\alpha - m\gamma = 0$ d'où $g \sin\alpha = \gamma$.
4. *Proj sur OM.* $T - mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{r} = 0$

$$T = \frac{mv^2}{r} + mg\cos\alpha$$

Problème 1. Un véhicule automobile pesant 1 000 *kgp* roule à 72 *km/h* sur une route horizontale dans une courbe de rayon égal à 200 *m*.

Calculer la force centrifuge appliquée au véhicule ;

Quelle inclinaison transversale faudrait-il donner à la chaussée pour neutraliser l'action de cette force centrifuge?

Solution.

Force centrifuge $F = \frac{mv^2}{r}$

$$= \frac{1\,000}{g} \times \frac{1}{200} \times 20^2 = \frac{2\,000}{g} \simeq 204\ kgf.$$

Calcul de l'inclinaison transversale :

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{rg} = \frac{400}{200g} = \frac{2}{g} \simeq 0{,}204$$

$$\alpha \simeq 11°32'$$

Problème 2. Quelle doit être la vitesse circonférencielle d'un satellite artificiel de la Terre qui décrirait autour de celle-ci une orbe circulaire à une altitude 1 500 *km*? On admettra que

$$g_h = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

g_h = accélération pesanteur à l'altitude h.
g_0 = accélération pesanteur à l'altitude 0.
R = rayon terrestre.
Vitesse du satellite supposée constante.

Solution.

Le mouvement étant circulaire uniforme, on a $\overrightarrow{P_h} + \overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{0}$ ou $|P| = |F|$.

P_h étant le poids du satellite artificiel à l'altitude h.

$F = \frac{mv^2}{R} = p_h$;

$P_h = \frac{P_h}{g_h} \times \frac{v^2}{R}$ d'où $v^2 = g_h R$

$g_h = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$; $R = \frac{40\,000}{2\pi}\ km$; $h = 1\,500\ km$

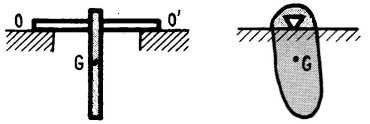
$g_h = g_0\left(\frac{40}{40+3\pi}\right)^2$ et $v^2 = g_0\left(\frac{40}{40+3\pi}\right)^2 \times \frac{40\times10^6}{2\pi}$

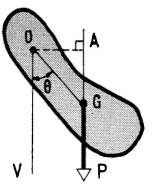
$v = \frac{40\times10^3}{40+3\pi}\sqrt{\frac{20g_0}{\pi}} \simeq 6\,394\ m/s$ ou $23\,000\ km/h$.

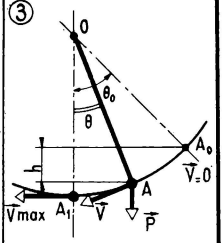
Longueur de l'orbite $2\pi\left(\frac{40\,000}{2\pi} + 1\,500\right) \simeq 49\,425\ km$.

Durée du parcours : 2 *h* 17 *mn* environ.

M. 55 PENDULE

① 

② 

③ 

PENDULE PESANT

Corps rigide mobile autour d'un axe qui ne passe pas par son centre de gravité (fig. 1). Abandonné à partir d'une position qui n'est pas celle d'équilibre, le pendule pesant oscille de part et d'autre de celle-ci.

Propriétés : Résultats d'expériences :

1. Le mouvement d'oscillation est périodique. La période dépend de l'amplitude ; elle croît avec celle-ci.

2. Les petites oscillations ont la même durée (lorsque l'élongation angulaire est de l'ordre de 5 à 6°). L'élongation angulaire est alors une fonction sinusoïdale du temps.

Calcul de la période (fig. 2).

OG = L et m = masse du pendule ;

J = moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation ;

$\mathcal{M} = J\omega'$;

$\mathcal{M}$ = moment du couple de rappel.

$= -OA \times P = -mgL \sin\theta$.

Par suite $J\omega' = -mgL \sin\theta$.

Si θ (en *rd*) très O petit, $\sin\theta \simeq 0$.

$J\omega' = -mgL\,\theta$.

$\theta = \theta_{max} \sin \omega t$.

Vitesse angulaire :

$$\theta = \theta_{max}\,\omega \cos \omega t.$$

Accélération angulaire :

$$\omega' = \theta'' = -\theta_{max}\,\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2\theta$$

ou enfin $\omega^2 = -\dfrac{\omega'}{\theta} = \dfrac{mgL}{J}$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgL}{J}}}$$

Période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}}}$$

Exemple.

$J = 0{,}02$ $m = \dfrac{1}{g}$ $L = 0{,}10\ m$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}02}{\frac{1}{g} \times g \times 0{,}10}} \simeq 2{,}8\ s.$$

PENDULE SIMPLE

Point pesant situé à une distance L d'un axe horizontal autour duquel il peut osciller (fig. 3).

On a alors $J = mL^2$

et $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Application. Calcul de la longueur du pendule simple qui bat la seconde dans une oscillation simple.

Solution :

$T = 2\ s$

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \frac{L}{g} = \frac{1}{\pi^2}$$

$$L = \frac{g}{\pi^2} \simeq 0{,}994\ m.$$

Vitesse du point pesant.

Elongation angulaire maximum θ_0 correspond à la position A_0 pour laquelle $v = 0$.

Position quelconque : élongation θ, position A, vitesse $\vec{V}$.

Hauteur de chute $h = L(\cos\theta - \cos\theta_0)$.

Travail fourni par le point matériel :

$\mathcal{C} = ph = pL(\cos\theta - \cos\theta_0)$.

Energie initiale $W_0 = 0$.

Energie cinétique à la position A :

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p}{2g}v^2$$

$$\frac{p}{2g}v^2 = pL(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$v^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$v = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

Maximum de v pour $\theta = 0$.

$$\boxed{v_{max} = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}}$$

Vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{v}{L} = \sqrt{\frac{2g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$\boxed{\omega_{max} = \sqrt{\frac{2g}{L}(1 - \cos\theta_0)}}.$$

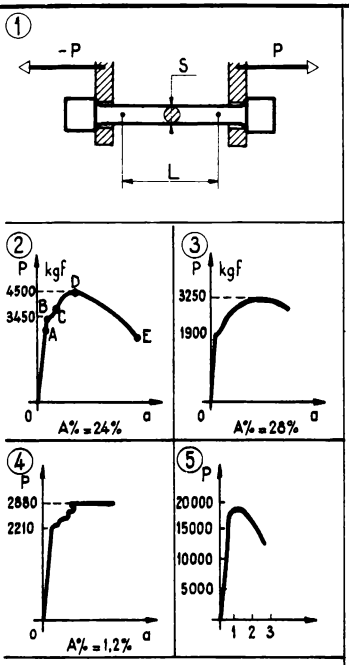
IV

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

TRACTION SIMPLE OU EXTENSION
COMPRESSION
CISAILLEMENT OU GLISSEMENT TRANSVERSAL
TORSION SIMPLE
FLEXION PLANE
SOLLICITATIONS COMPOSÉES
FLAMBEMENT

TRACTION SIMPLE (I)
(OU EXTENSION)

M. 56



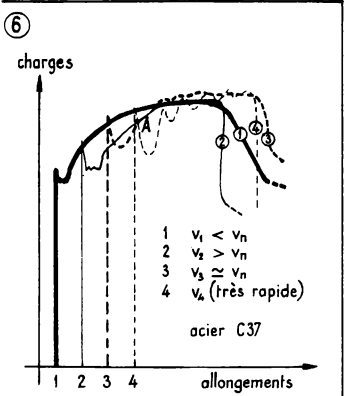


Fig. 6 (ci-dessus). Influence de la vitesse **v** de mise en charge sur le relevé des caractéristiques d'un acier A.37.

v_n = Vitesse normalisée avec accroissement maximum de charge unitaire limitée à 1 *kgf/mm²* par seconde dans les parages de la limite élastique.

ÉLASTICITÉ ET PLASTICITÉ

Déformation élastique. Le corps reprend ses dimensions primitives lorsque les forces qui l'ont déformé ont cessé d'agir.

Déformation plastique (ou permanente). Subsiste après cessation de l'action des forces.

Déformation semi-élastique. S'atténue sans disparaître totalement.

Aucun matériau n'est parfaitement élastique.

La **limite élastique** est dépassée dès que la déformation devient plastique ou semi-élastique sous l'action des forces.

EXTENSION (fig. 1).

Les efforts appliqués tendent à allonger la pièce suivant son axe.

Essais de traction (fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6). Conditions :
— éprouvette normale L = 100 *mm* S = 150 *mm²*.

La machine de traction enregistre la variation de déformation (**a** allongement en fonction de la charge P).

(fig. 2). Acier A. 48.
(fig. 3). Acier C. 35.
(fig. 4). Aluminium.
(fig. 5). Acier 16 NCD 13 trempé à 850° et revenu à 400° (acier au nickel-chrome-molybdène).

Étude du diagramme de traction (fig. 2). Considérer 4 régions :

(OA) Proportionnalité — déformation élastique proportionnelle à la charge :

$$\boxed{\frac{P}{a} = \text{constante}}$$ Loi de HOOKE

(OB) Elasticité — pas de déformation permanente après suppression de l'effort P.

(BC) Grand glissement

(très sensible)
— aciers doux recuits
— duralumin

(insensible)
— aciers durs

(CDE) Grands allongements et striction.

CARACTÉRISTIQUES DU MATÉRIAU

$$\frac{\frac{P}{S}}{\frac{a}{L}} = \frac{n}{i} = E\left(\begin{matrix}\text{Module}\\ \text{de}\\ \text{YOUNG}\end{matrix}\right)$$

ou $\boxed{n = Ei}$

Expression de la loi de proportionnalité.

$\frac{P}{a}$ = constante ;

$\frac{a}{L}$ = i (allongement relatif) ;

$\frac{P}{S}$ = n (contrainte en *kgf/mm²*) ;

E = charge en *kgf* sur une section de 1 *mm²* qui ferait a = L si cela était possible.

Donc E s'exprime en *kgf/mm²*.

M. 57 — TRACTION SIMPLE (2)
(OU EXTENSION)

Limite pratique d'élasticité R_e kgf/mm^2.
Contrainte à partir de laquelle apparaît une déformation permanente appréciable égale à 2 °/₀₀ de la longueur de l'éprouvette.

Pour les aciers :
$20\ kgf/mm^2 < R_e < 100\ kgf/mm^2$

Charge de rupture R_r kgf/mm^2.
C'est la plus grande contrainte supportée pendant l'essai :

$$R_r = \frac{P_r}{S}$$

Pour les aciers : $25 < R_r < 200$.

Allongement pour cent (A %).

$$A\,\% = \frac{a}{L_0} \times 100 = \frac{L_1 - L_0}{L_0} \times 100.$$

Pour les aciers : $0\,\% < A\,\% < 30\,\%$.

Contraction relative du diamètre :

$$i' = \frac{D_0 - D_1}{D_0}$$

$$\frac{i'}{i} = \nu \text{ (coefficient de POISSON)}$$

Allongement (a) en fonction des dimensions de la pièce :

$n = Ei$ ou $\frac{P}{S} = E\frac{a}{L}$

$$a = \frac{PL}{SE}$$

a *mm* ; L *mm*
P *kgf* ; S mm^2.

Application. De combien s'allongerait un tirant de ferme subissant un effort de traction de 12 000 *kgf*, sachant qu'il a une portée de 8 *m* et qu'il est formé d'un fer rond de 45 *mm* de diamètre? ($E = 20\,000\ kgf/mm^2$).

Solution.

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 45^2}{4} \simeq 1\,590\ mm^2$$

$$a = \frac{12\,000 \times 8\,000}{1\,590 \times 20\,000} \simeq 3\ mm.$$

Charge maximum que soulève un câble.

Q charge à soulever en *kgp*.
P poids du câble vertical en *kgp*.
γ accélération de démarrage en *m/s/s*.
S section utile du câble en mm^2.
R charge pratique maximum en kgf/mm^2 que peut supporter le matériau du câble.

Force d'inertie au démarrage :

$$F = \frac{Q + P}{g} \cdot \gamma$$

$$\text{Effort total} = Q + P + \frac{Q + P}{g}\gamma = (Q + P) \cdot \frac{g + \gamma}{g}.$$

Condition de résistance :

$$RS \geqslant (Q + P)\frac{g + \gamma}{g}$$

$$Q \leqslant RS \cdot \frac{g}{g + \gamma} - P$$

Application. Calculer la section utile d'un câble en acier pouvant monter une benne pesant 3 tonnes du fond d'un puits de mine de profondeur 250 *m*. (Accélération de démarrage 1 *m/s/s* ; résistance pratique de l'acier 12 kgf/mm^2 ; poids spécifique 7,8 kgp/dm^3.)

Solution.

Poids du câble :
$P = S \times 2\,500 \times 7{,}8 \times 10^{-4}$ (S en mm^2)
$\simeq 1{,}95\ S\ kgp$

$12\ S \geqslant (3\,000 + 1{,}95\ S)\frac{g + 1}{g}$ et $S \geqslant$ **342** mm^2

Contraintes pratiquement admissibles R kgf/mm^2 (ou R_t).

La résistance pratique est la charge en kgf/mm^2 qu'une pièce peut supporter en toute sécurité. Elle varie, pour un matériau donné, avec le mode d'action des efforts, le genre de fatigue subie, l'altération subie par le matériau pour sa mise en œuvre (forgeage, laminage, etc.), l'approximation de la méthode employée dans le calcul des efforts.

Il faut : $\frac{P}{S} \leqslant R$ $\quad (n \leqslant R)$.

Aciers courants

Nouvelle formule	Ancienne formule	
$R = \frac{R_e}{\sigma}$ $(2 < \sigma < 2{,}5)$	$R = \frac{R_r}{\alpha}$ $(3 < \alpha < 5)$	$R \simeq 8$ à $10\ kgf/mm^2$

Fontes	Bois
$R = 1/8\ R_r$ $(R \simeq 2$ à $4)$	$R = 1/10\ R_r$ $(R \simeq 0{,}2$ à $0{,}4)$

Remarques : α et σ sont des coefficients de sécurité :

— Pour efforts variés de même sens : $R' = 2/3\ R$.
— Pour efforts variés alternés : $R' = 1/3\ R$.

Application. Une suspente de pont métallique subit un effort statique de traction de 46 000 *kgf* ; sa longueur est de 10 *m*. Elle est en acier Martin AC 54 au chrome-cuivre.
Quel est son diamètre? Les règlements imposent $R = R_e/2$ (on donne $R_e = 36\ kgf/mm^2$; $E = 22\,000\ kgf/mm^2$).

Solution : $S \geqslant \frac{46\,000}{18} \simeq 2\,560\ mm^2$

diamètre :
$d = \sqrt{\frac{2\,560 \times 4}{\pi}} \simeq 57\ mm$
soit **60** *mm*

allongement :
$a = \frac{PL}{SE} = \frac{nL}{E}$
$= \frac{18 \times 10\,000}{22\,000} \simeq 8{,}2\ mm$

COMPRESSION SIMPLE
FATIGUE

M. 58

COMPRESSION SIMPLE

Définition.

Phénomène analogue à l'extension.

Les valeurs de E et R_r sont conservées sauf pour la fonte où E et R_r (compression) sont plus grands que E et R_r (extension). E peut atteindre 16 000 kgf/mm^2 pour la fonte en compression.

La limite élastique est en général plus élevée (sauf pour le bois).

Formules fondamentales :

$$\boxed{P = nS} \qquad \boxed{a' = \frac{PL}{SE}}$$

n contrainte en kgf/mm^2 ;
a' raccourcissement en mm ;
S section de la pièce en mm^2 ;
P effort de compression en kgf.
L longueur de la pièce en mm.

Application. Quatre colonnes en fonte de section circulaire creuse, épaisseur 15 mm, sont utilisées pour supporter un réservoir pesant 4 000 kgp et pouvant contenir 120 m^3 d'eau. La résistance à la rupture de la fonte, par compression, est de 80 kgf/mm^2.

Calculer le diamètre extérieur des colonnes travaillant à la compression simple.

Solution.

Résistance pratique de la fonte :

$$\frac{80}{10} = 8 \ kgf/mm^2 ;$$

Quantité d'eau dans le réservoir : variable ; Effort de compression : variable.

Adopter : $R = \frac{8}{2} = 4 \ kgf/mm^2$.

Poids maximum à supporter par colonne :

$$\frac{124\,000}{4} = 31\,000 \ kgp.$$

Section minimum d'une colonne :

$$\frac{31\,000}{4} = 7\,750 \ mm^2.$$

Calcul du diamètre extérieur D,
Diamètre intérieur $d = D - 30$.

$$\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \geqslant 7\,750$$

$$D^2 - d^2 \geqslant \frac{7\,750 \times 4}{\pi} \simeq 10\,000 \ mm^2$$

$$(D + d)(D - d) \geqslant 10\,000$$

$$D + d \geqslant \frac{10\,000}{30} \simeq 333 \text{ mm} \quad \text{et} \quad D - d = 30 \text{ mm}$$

$$D \simeq \mathbf{182} \text{ mm} \quad \text{et} \quad d \simeq \mathbf{152} \text{ mm}$$

Remarque. Si la hauteur des colonnes est supérieure à 5D la compression n'est plus simple. Dans ce cas les colonnes devront être calculées au flambement.

Une pièce travaille à la compression simple lorsque sa longueur n'est pas supérieure à 5 fois la plus petite dimension de sa section.

Relations entre dureté et résistance
(à la traction ou à la compression)

$$\boxed{\frac{P}{S} = \Delta}$$ Δ : nombre de BRINELL

P poussée en kgf, exercée par une bille en acier trempé de diamètre D mm, normalement à la surface bien dressée d'une pièce.

S surface de l'empreinte de la bille.

Généralement P = 3 000 kgf, D = 10 mm, durée de l'effort = 15 s.

Pour les aciers au carbone :

$$R = 0{,}34\ \Delta$$

Pour aciers spéciaux, bronzes, fontes, on a $R = c\Delta$.

(c) est une valeur variable.

FATIGUE ET ENDURANCE R_f.

Formules de SÉJOURNÉ.

Les pièces soumises à des efforts périodiques se rompent sous des efforts inférieurs à R_r et même à R_e.

La limite en deçà de laquelle la rupture n'a pas lieu est la limite de fatigue ou d'endurance.

1. **Efforts de même sens de f à F** (avec $f < F$).

Limite de fatigue

$$\boxed{R_f = 5{,}3\left(1 + \frac{f}{F}\right)}$$

— Si la charge est constante : $f = F$ et $R = 10{,}6 \ kgf/mm^2$.

— Si la charge s'annule périodiquement : $f = 0$ et $R = 5{,}3 \ kgf/mm^2$.

2. **Efforts de sens contraires :**

Limite de fatigue

$$\boxed{R_f = 5{,}3\left(1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{F'}{F}\right)}$$

F' plus grande tension ou compression.
F plus petite compression ou tension.
— Si $F' = 0$, on a $R = 5{,}3 \ kgf/mm^2$.
— Si $F' = F$, on a $R = 3{,}2 \ kgf/mm^2$.

Pour les aciers, on a approximativement :

$$\frac{1}{3} R_e < \text{limite d'endurance} < \frac{2}{3} R_e$$

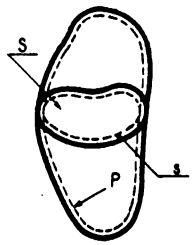
Quelques valeurs de R_f *(kgf/mm^2).*

acier moulé	28
fonte ordinaire	10
fonte à graphite sphéroïdal	20
alliages légers	5 à 12
acier XC 10	23

TUBES ET ENVELOPPES

CALCULS

①



ÉPAISSEUR D'UNE ENVELOPPE OU D'UN TUBE MINCE

Forme générale de l'équation de contrainte (fig. 1).

p = pression constante dans l'enveloppe en kgf/mm^2.
S = aire comprise à l'intérieur de la section de l'enveloppe en mm^2.
n = contrainte constante dans une section en kgf/mm^2.
s = aire de la section considérée en mm^2.

Les pressions sont normales aux parois. On a :
(p.S) Résultante de la poussée sur la paroi d'un côté de la section considérée.
(n.s) Résistance élastique de la section.

Equilibre $\boxed{p \cdot S = n \cdot s}$

Epaisseur d'un tube cylindrique mince (fig. 2).

Section transversale $S = \frac{\pi D^2}{4}$; section de la paroi $s = \pi De$.

Equilibre : $p \cdot \frac{\pi D^2}{4} = n \cdot \pi De$ $\qquad \boxed{e = \frac{pD}{4n}}$ (1)

Section longitudinale $S = DL$; section de la paroi $s = 2eL$.

Equilibre : $p \cdot DL = n \cdot 2eL$ $\qquad \boxed{e = \frac{pD}{2n}}$ (2)

Adopter le cas le plus défavorable (1) ou (2).

Enveloppes sphériques : Mêmes formules.

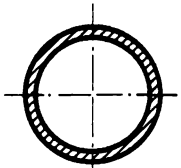
Exemple. Calcul de l'épaisseur d'un tube d'amenée d'huile à un pot de presse ;
$p_{max} = 250\ kgf/cm^2$; $D = 10\ mm$; $R_e = 8\ kgf/mm^2$.

Solution :

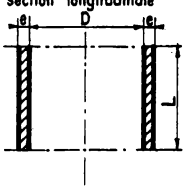
$250\ kgf/cm^2 = 2{,}5\ kgf/mm^2$ $\qquad e \geqslant \frac{2{,}5 \times 10}{2 \times 8}$; $\qquad e \geqslant 1{,}6\ mm$.

②

section transversale



section longitudinale



ÉPAISSEUR D'UNE ENVELOPPE A PAROIS ÉPAISSES (fig. 3).

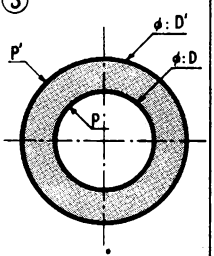
e = épaisseur en mm.
D' = diamètre ext. en mm. | p' = pression ext. en kgf/mm^2.
D = diamètre int. en mm. | p = pression int. en kgf/mm^2.

Formules de LAMÉ :

Si $p' < p$; $\qquad R = \frac{p(D'^2 + D^2) - 2p'D'^2}{D'^2 - D^2}$

Si $p' > p$; $\qquad R = \frac{2p'D'^2 - p(D'^2 + D^2)}{D'^2 - D^2}$

③



Formules pratiques pour calculer **e** :

Si $p' < p$. On a $\qquad e \geqslant \frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{R + p}{R + 2p' - p}} - 1\right)$

Si p' négligeable devant p $\qquad \boxed{e \geqslant \frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{R + p}{R - p}} - 1\right)}$

Pour les fortes pressions intérieures, augmenter p' par pré-contraintes.

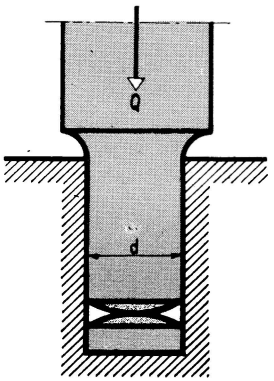
Si $p' > p$. On a $\qquad e \geqslant \frac{D'}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{R - 2p' + p}{R - p}}\right)$

Si p négligeable devant p' $\qquad \boxed{e \geqslant \frac{D'}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{R - 2p'}{R}}\right)}$

APPLICATION DE LA COMPRESSION
CALCULS

M. 60

①



DETERMINATION DU DIAMETRE D'UN PIVOT

1. **Condition de résistance à la compression.**

$\frac{\pi d^2}{4} \geqslant \frac{Q}{R}$ d en *mm*, Q en *kgf*, R en *kgf/mm²* (compression).

ou $d \geqslant \sqrt{\frac{4Q}{\pi R}}$ soit $\boxed{d_1 \geqslant 1{,}13 \sqrt{\frac{Q}{R}}}$ (1)

2. **Condition de graissage.**

La pression au contact doit rester inférieure à une valeur p *kgf/cm²* donnée par l'expérience et qui dépend de la vitesse de rotation et du mode de graissage (libre ou sous pression).

$20 < p < 300$ $\quad (p\ kgf/cm^2 = \frac{p}{100}\ kgf/mm^2)$

$\frac{\pi d^2}{4} \geqslant \frac{Q}{\frac{p}{100}}$ ou $d \geqslant 20 \sqrt{\frac{Q}{\pi p}}$

$$\boxed{d_2 \geqslant 11{,}3 \sqrt{\frac{Q}{p}}} \qquad (2)$$

3. **Condition de température** (limitation).

La puissance A absorbée par le frottement (sur l'unité de surface) et transformée en chaleur doit être inférieure à une limite donnée par l'expérience.

$2\,000 < A < 10\,000$ | A *kgm/s/m²* de surface de frottement.

$$\mathcal{P}\ kgm/s = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{d}{1\,000} \cdot \frac{n}{60} \cdot f \cdot Q$$

d en *mm* ; n en *tr/mn* ; f coefficient de frottement.

$A\ kgm/s/m^2 = A \cdot 10^{-6}\ kgm/s/mm^2$.

Il faut $\mathcal{P} \leqslant AS$ or $S = \frac{\pi d^2}{4}$

$$\frac{2}{3} \pi \frac{d}{1\,000} \frac{n}{60} f\, Q \leqslant A \cdot 10^{-6} \frac{\pi d^2}{4}$$

soit $$\boxed{d_3 \geqslant \frac{400}{9} f \cdot \frac{nQ}{A}} \qquad (3)$$

On adopte pour **d** la plus grande valeur de (1), (2), (3).

Application.

Déterminer le diamètre à donner à un pivot supportant une charge de 500 *kgp* tournant à 300 *tr/mn* ; le coefficient de frottement est 0,05 ; la pression du lubrifiant 50 *kgf/cm²*. La résistance de sécurité à la compression de l'acier utilisé est 10 *kgf/mm²*.

Solution.

Q = 500, R = 10, p = 50, f = 0,05, n = 300, A = 8 000.

On a successivement :

$d_1 \geqslant 1{,}13 \sqrt{\frac{500}{10}} \simeq 8\ mm$

$d_2 \geqslant 11{,}3 \sqrt{\frac{500}{50}} \simeq 36\ mm$

$d_3 \geqslant \frac{400}{9} \times 0{,}9 \times 300 \times 500 \times \frac{1}{8\,000} \simeq 42\ mm.$

On adoptera donc $d \geqslant 42$ *mm*, soit **d** = 45 *mm*.

CONSTRUCTIONS EN MAÇONNERIE

La résistance à la rupture par écrasement des matériaux employés en maçonnerie varie beaucoup avec les matériaux :

Quelques valeurs de R_r :

Calcaires	de 20 à 1 000 *kgf/cm²*.
Meulières	de 20 à 80 *kgf/cm²*.
Grès	de 250 à 700 *kgf/cm²*.
Basaltes	jusqu'à 2 000 *kgf/cm²*.
Granit	de 400 à 1 000 *kgf/cm²*.
Briques	de 40 à 150 *kgf/cm²*.
Béton non armé	de 160 à 200 *kgf/cm²*.

Coefficients de sécurité admis (voir M 57)
$\alpha = 10$ pour pierres et briques.
$\alpha \simeq 3{,}5$ pour le béton.
Pour maçonnerie ordinaire :
— résistance à la rupture : $R_r = 100\ kgf/cm^2$.
— résistance pratique : $R = 10\ kgf/cm^2$.

Application. Quelle hauteur limite peut-on donner à un mur d'épaisseur constante, en toute sécurité? Poids spécifique de la maçonnerie 2,3 *kgp/dm³*.

Solution.

Section de base $S dm^2$; hauteur **h** *dm* ; poids : 2,3 Sh *kgp*.

Résistance à l'écrasement $R_r S = 1\,000\,S$

$R_r = 1\,000\ kgf/dm^2$ (S en dm^2).

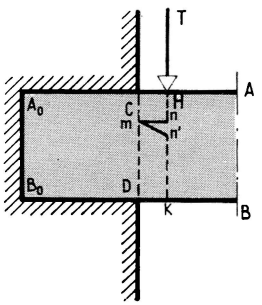
$1\,000\,S \geqslant 2{,}3\,Sh$; $h \leqslant \frac{1\,000}{2{,}3} \simeq 435$

ou $h \leqslant 43{,}5\ m$.

La maçonnerie ordinaire ne conviendrait donc pas à un barrage de hauteur **50** *m*.

M. 61 — CISAILLEMENT
(OU GLISSEMENT TRANSVERSAL)

①



CONDITIONS DE CISAILLEMENT
(ou glissement) (fig. 1).

La section HK est soumise à un effort de cisaillement si la force $\vec{T}$, appelée effort tranchant, située dans le plan de HK, tend à faire glisser cette section par rapport à la section infiniment voisine CD.

Formules relatives au glissement.

- mn prend la position mn'.
- nn' = glissement absolu.

$\frac{nn'}{mn}$ = j = glissement relatif.

Loi de HOOKE :

$\frac{T}{nn'}$ = constante (période de déformation élastique).

$\frac{T}{S}$ = t *kgf/mm²* = contrainte de glissement.

$$\frac{\frac{T}{S}}{\frac{nn'}{mn}} = \frac{t}{j} = G \quad \text{ou} \quad \boxed{t = Gj}$$

analogue à n = Ei

G = constante (module de COULOMB) ou module d'élasticité transversale.

Pour les aciers G = 2/5E soit 8 000 *kgf/mm²*.

Condition de résistance :

$$t_{max} = \frac{T}{S} < R_g.$$

Contrainte maximum de glissement (R_g).

Pour métaux ductiles (aciers très doux, aluminium pur) :

$R_{rg} = 1/2\ R_r$ et $R_g = 1/2\ R$ donc $t = n/2$.

Pour métaux durs, alliages, bétons :

$R_{rg} = 4/5\ R_r$ et $R_g = 4/5\ R$ donc $t = 4/5n$.

R_{rg} = effort de rupture par glissement.

Poinçonnage.

L'effort nécessaire au poinçonnage dépend :

— de l'épaisseur **e** en *mm* à poinçonner;
— du diamètre **d** en *mm* du poinçon ou de la pastille à enlever;
— de la résistance R_{rg} à la rupture par glissement de la tôle à poinçonner;
— de la résistance R_r de sécurité du poinçon.

Effort nécessaire : $\pi de \cdot R_{rg}$.

Effort que peut supporter le poinçon :

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot R_r.$$

Condition de fonctionnement :

$$\pi de \cdot R_{rg} \leqslant \frac{\pi d^2}{4} \cdot R_r$$

soit $$\boxed{e \leqslant \frac{d}{4} \times \frac{R_r}{R_{rg}}}$$

Pour aciers doux $R_{rg} \simeq 30\ kgf/mm^2$.

Pour aciers à outils $R_r \simeq 80\ kgf/mm^2$.

Donc $$e \leqslant \frac{d}{4} \times \frac{80}{30}$$

soit $$e \leqslant \frac{2d}{3} \quad \text{ou} \quad d \geqslant \frac{3e}{2}.$$

Résistance des filets de vis.

d diamètre du noyau en *mm*;
D diamètre nominal en *mm*;
Q effort axial sur la vis en *kgf*;
R résistance pratique à la traction;
$\mathbf{R_g}$ résistance pratique au glissement;
h hauteur de l'écrou en *mm*.

Condition de résistance à la traction :

$$Q \leqslant \frac{\pi d^2}{4} \cdot R_e.$$

Condition de résistance au cisaillement des filets :

$$Q \leqslant \pi dh \cdot R_g.$$

Hauteur nécessaire de l'écrou :

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot R \leqslant \pi dh \cdot R_g \quad \text{ou} \quad \boxed{h \geqslant \frac{d}{4} \times \frac{R}{R_g}}.$$

Pour l'acier doux $R = 2R_g$ d'où

$$\boxed{h \geqslant \frac{d}{2}}.$$

Pratiquement, au lieu de **d**, on prend D.

Pour l'écrou normal **h** = 0,8D.

Clavetage.

x longueur de clavetage.
L largeur de la clavette.
d diamètre de l'arbre.
$\mathcal{M}$ couple moteur.

Il faut $x \geqslant \frac{T}{LR_g}$ avec $T \simeq \frac{2\mathcal{M}}{d}$.

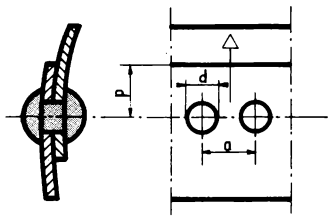
Les dimensions transversales **L** et **h** sont normalisées (NF.E. 22-171).

CISAILLEMENT

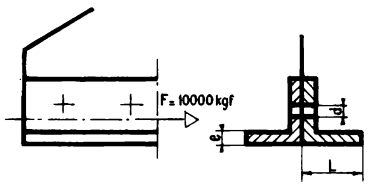
APPLICATION

M. 62

①



②



CALCUL DES RIVURES

Diamètre du rivet.

$$d = \frac{45 + e}{15 + e} \quad \text{ou} \quad d = \sqrt{50e} - 4$$

ou même $d \simeq 2e$.

e *mm* épaisseur commune des tôles à assembler.

d *mm* diamètre du rivet convenable.

Si les pièces à assembler sont d'épaisseurs différentes, on prend :

$$e_{max} < d < 3{,}5\, e_{min}$$

Assemblage de deux cornières :

$$d = \frac{L}{5} + 4$$

L *mm* longueur de l'aile de la cornière.

- **Pas de la rivure (ou écartement des rivets sur une même file)** (a *mm*).
- Rivure de solidarisation (aucun effort à transmettre) $a \leqslant 7d$.
- Rivure de résistance $3d < a < 7d$.
- Charpentes métalliques $a = 3{,}5d$.
- Rivure d'étanchéité et de résistance (réservoirs et chaudières) $2{,}75d < a < 3{,}5d$.
  Ecartement des files de rivets.
  On prend $b = 3d$.

Pince (p). Distance qui sépare la dernière file de rivets de l'extrémité de la tôle (fig. 1) :

$p = a - d$ (ou encore $p \simeq 2d$).

Coefficient de rivure (ρ) ou rapport d'affaiblissement suivant la ligne des rivets

$$\rho = \frac{R(a - d) \cdot e}{R \cdot a \cdot e} = \frac{a - d}{a}$$

Si $a = 3d$ $\qquad \rho = \frac{2}{3}$.

Contrainte admissible (R_g).

- Rivets posés à la machine :

$$R_g = \frac{4}{5} R = \frac{4}{5} \times 14{,}4 = 11{,}5\ kgf/mm^2.$$

- Rivets posés à la main :

$$R_g = 0{,}72\, R \simeq 10{,}4\ kgf/mm^2.$$

Diamètres normalisés.

1 - 1,5 - 2 - 2,5 - 3 - 3,5 - 4 - 4,5 - 5 - 5,5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 12 - 14 - 16 - 18 - 20 - 22 - 24 - 27 - 30 - 33.

Le diamètre de perçage d_1 :

$d_1 = d + 1 \longrightarrow$ (si $d < 10$)

$d_1 = d + 2 \longrightarrow$ (si $d \geqslant 10$)

Application (fig. 2). Deux cornières de 50 × 50 × 5 sont soumises à un effort de traction de 10 000 *kgf*.

Déterminer le nombre et le diamètre des rivets d'attache sur un gousset, puis vérifier.

Solution.

1. Diamètre des rivets :

$$d = \frac{L}{5} + 4 = \frac{50}{5} + 4 = \mathbf{14}\ mm \text{ (perçage } \phi 16).$$

2. Section à prendre en compte par rivet :

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 16^2}{4} = 201\ mm^2.$$

3. Nombre de rivets nécessaires (chaque rivet a deux sections de cisaillement) :

$$\frac{F}{R_g \cdot 2S} = \frac{10\,000}{11{,}5 \times 2 \times 201} \simeq 2{,}2 \quad \text{donc } \mathbf{3} \text{ rivets.}$$

4. Contrainte dans un rivet :

$$n_g = \frac{10\,000}{402 \times 3} \simeq 8{,}3\ kgf/mm^2.$$

5. Pression diamétrale.
Surface à considérer $d.e = 16 \times 5 = 80\ mm^2$.

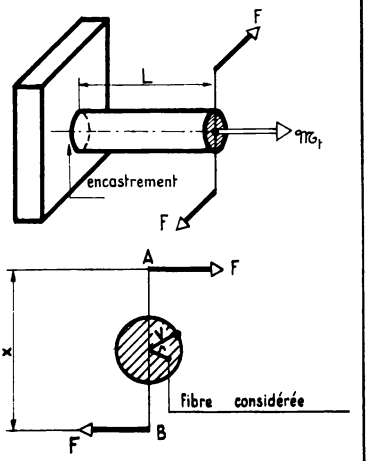
$$p = \frac{10\,000}{3 \times 80} \simeq 42\ kgf/mm^2$$

$< 14{,}4 \times 3\ kgf/mm^2$ (acceptable).

Remarque. Le même calcul peut se faire pour les boulons d'assemblage travaillant au cisaillement (plateaux d'accouplement) ; mais le noyau travaille à la traction du fait du serrage de l'écrou, c'est alors le cas de sollicitations composées : traction-cisaillement.

M. 63 — TORSION SIMPLE (I)

ARBRES ET POUTRES

① 

CONDITIONS DE TORSION (fig. 1)

Le cylindre circulaire droit est soumis aux deux extrémités à deux couples antagonistes $\overrightarrow{\mathcal{M}_t}$ dont les vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ sont parallèles à la direction de l'axe.

- Les déformations (petites) sont du domaine élastique ;
- Les sections restent planes ;
- La longueur d'une fibre est sensiblement invariable ;
- La déformation ne crée pas de contrainte normale.

Angle de torsion (θ) en *rd*. C'est l'angle dont tournent l'une par rapport à l'autre deux sections distantes de l'unité (1 *mm*).

Pour une longueur L *mm*, $\alpha = \theta L$ *rd*.

Après torsion, les spires deviennent des hélices de même pas.

Contrainte dans une fibre. Elle est proportionnelle à la distance de cette fibre au centre.

$$t = G\theta v$$

t contrainte de glissement en kgf/mm^2.
G module d'élasticité de glissement.
v distance du centre à la fibre considérée.

La région dangereuse est à la périphérie.

Les fibres centrales ne travaillent pas,

Intérêt à utiliser des pièces cylindriques creuses.

Moment de torsion et angle de torsion.

Le moment de torsion ($\mathcal{M}_t$) est proportionnel à l'angle de torsion. On a la relation :

$$\mathcal{M}_t = G\theta I_0$$

I_0 moment d'inertie de la section circulaire par rapport à son centre, ou moment d'inertie polaire.

Pour un cercle,

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} \simeq \frac{d^4}{10}.$$

Pour une couronne circulaire,

$$I_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \simeq \frac{D^4 - d^4}{10}.$$

Valeurs admises de θ pour les arbres de machines industrielles. L'angle de torsion est compris entre 1/4 de degré et 1 degré par mètre de longueur :

$$0{,}25\ d/m < \alpha < 1\ d/m.$$

Conversion des radians par millimètre en degrés par mètre :

$$\theta = \frac{\pi\alpha}{180\,000}\ rd/mm \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{180\,000\theta}{\pi}\ d/m.$$

Equation de contrainte :

$$\boxed{\mathcal{M}_t \leqslant R_g \frac{I_0}{v}}$$

$\mathcal{M}_t$ moment de torsion en *mm . kgf*.

$\frac{I_0}{v}$ module de torsion pour les fibres périphériques les plus fatiguées.

$$\frac{I_0}{v} = \frac{\pi d^3}{16} \simeq \frac{d^3}{5}.$$

Application. Calculer le diamètre d'un arbre devant transmettre 10 *ch* à 450 *tr/mn*.

Pour l'acier utiliser R = 10 kgf/mm^2.

Vérifier l'angle de torsion.

Solution.

Moment de torsion :

$$\mathcal{M}_t = \frac{716\,\mathcal{P}}{N} = \frac{716 \times 10}{450} \simeq 16\ m.kgf.$$

Calcul du diamètre :

$$\mathcal{M}_t \leqslant R_g \cdot \frac{I_0}{v}$$

$$16\,000 \leqslant \frac{10}{2} \times \frac{d^3}{5} \quad \text{d'où} \quad d \geqslant \sqrt[3]{16\,000} \simeq 25{,}2\ mm.$$

On pourra adopter d = 30 *mm*.

Evaluation de l'angle de torsion :

$$\mathcal{M}_t = G\theta I_0$$

$$16\,000 = 8\,000 \times \theta \times \frac{d^4}{10}$$

$$\text{et} \quad \theta = \frac{20}{30^4} = \frac{1}{40\,500}\ rd/mm.$$

Soit en degrés par mètre :

$$\alpha = \frac{180\,000\theta}{\pi} = \frac{180\,000}{\pi} \times \frac{1}{40\,500} \simeq 1°25' > 1\ d/m$$

donc valeur un peu exagérée.

En adoptant comme maximum 1 *d/m*, on aurait : $\theta = \frac{\pi}{180\,000}$

$$16\,000 \leqslant 8\,000 \times \frac{\pi}{180\,000} \times \frac{d^4}{10}$$

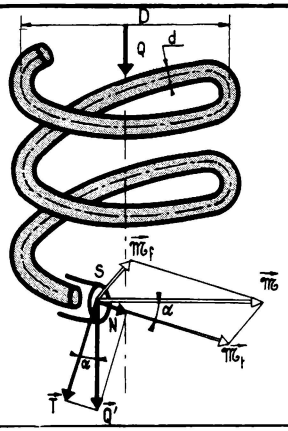
$$\text{soit} \quad d^4 \geqslant \frac{3\,600\,000}{\pi}$$

$d \geqslant 32$ mm (pour cette valeur $t \simeq 2{,}5\ kgf/mm^2$).

TORSION SIMPLE (2)

ARBRES ET RESSORTS

M. 64

① 

APPLICATIONS

Diamètre des arbres de transmission.

1er cas. **Transmissions courantes : arbres calculés à la contrainte.**

$\mathcal{P}$ = puissance transmise en *ch.*
N = vitesse de rotation en *tr/mn.*
R_g = 4 *kgf/mm²*.

$$\mathcal{M}_t \leqslant R_g \frac{I_0}{v}$$

$$\frac{716\,000\mathcal{P}}{N} \leqslant 4\,\frac{\pi d^3}{16}$$

$$d^3 \geqslant \frac{716\,000 \times 4}{\pi} \times \frac{\mathcal{P}}{N}$$

$$\boxed{d \geqslant 96 \sqrt[3]{\frac{\mathcal{P}}{N}}}$$

2e cas. **Arbres calculés à la torsion avec angle de torsion α = 1/4 degré/mètre.**

$$\mathcal{M}_t \leqslant G \cdot \theta \cdot I_0$$

$$\frac{716\,000\mathcal{P}}{N} \leqslant 8\,000 \times \frac{\pi}{4 \times 180\,000} \times \frac{\pi d^4}{32}$$

$$d^4 \geqslant 2\,065 \cdot 10^5 \frac{\mathcal{P}}{N}$$

$$\boxed{d \geqslant 120 \sqrt[4]{\frac{\mathcal{P}}{N}}}$$

Calcul des ressorts de torsion (fig. 1).

Q force extérieure agissant suivant l'axe du ressort ;
S section normale du fil ;
d diamètre du fil ;
D diamètre moyen d'enroulement du ressort.

Réduire $\overrightarrow{Q}$ en S

$$\overrightarrow{Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{Q} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \frac{QD}{2}$$

$\overrightarrow{\mathcal{M}}$ perpendiculaire au plan de (S, Q).

$\overrightarrow{\mathcal{M}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathcal{M}_t} + \overrightarrow{\mathcal{M}_f}$.

$\overrightarrow{\mathcal{M}_t}$ perpendiculaire à S est le moment de torsion ;

$\overrightarrow{\mathcal{M}_f}$ dans le plan de S est le moment de flexion.

$\overrightarrow{Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T}$ normale et tangentielle à S.

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{M} \cos \alpha = \frac{QD}{2} \cos \alpha$$

$$\mathcal{M}_f = \frac{QR}{2} \sin \alpha ; \quad T = Q \cos \alpha ; \quad N = Q \sin \alpha$$

α constant donc $\mathcal{M}_f$ constant et θ angle de torsion constant ; α très petit, par suite $\sin \alpha \simeq 0$; $\cos \alpha \simeq 1$ et $\mathcal{M}_t = \frac{QD}{2}$.

Flèche (f). $f = L_1 - L_0$

L_0 longueur au repos.
L_1 longueur sous charge.

$$\text{Flexibilité} = \frac{f}{Q} = \varphi$$

invariable dans les limites d'élasticité.

Longueur d'une spire : πD ;
Angle de torsion par spire : πDθ ;
Flèche par spire : $\pi D\theta \times \frac{D}{2}$;

Flèche totale pour n spires $\quad f = \frac{\pi D^3 \theta n}{2}$

$$\mathcal{M}_t = G\theta I_0 \quad \text{ou} \quad \frac{QD}{2} = G\theta \frac{\pi d^4}{32}$$

$$Q = \frac{\pi G d^4}{16\,D} \times \theta.$$

Eliminer θ entre f et Q.

$$\boxed{f = Q \times \frac{8\,D^3 n}{Gd^4}}$$

Contrainte dans le fil :

$$\mathcal{M}_t = t \frac{I_0}{V} \quad \text{ou} \quad t = \mathcal{M}_t \times \frac{V}{I_0} = \frac{QD}{2} \times \frac{16}{\pi d^3}$$

$$\boxed{t = \frac{8\,QD}{\pi d^3} \leqslant R_g}$$

$$f = \frac{8\,QD}{\pi d^3} \times \frac{\pi D^2 n}{Gd} \quad \text{donc} \quad t = \frac{Gd}{\pi D^2 n} f$$

t est proportionnel à f.

Problème. Calculer le diamètre du fil, le nombre de spires, la flèche, le pas d'un ressort d'embrayage soumis à un effort maximum de 100 *kgf* ; flexibilité 1 *mm/kgf* ; contrainte maximum R_g = 35 *kgf/mm²* ; G = 8 500 *kgf/mm²* ; diamètre d'enroulement 80 *mm.*

Solution.

1 Calcul de **d** : $\frac{8\,QD}{\pi d^3} \leqslant R_g$

$$d^3 \geqslant \frac{8 \times 100 \times 80}{35\pi} ; \quad d \geqslant 8{,}35 \quad \text{soit} \quad d = \mathbf{9}\ mm.$$

2. Nombre de spires : $\varphi = \frac{f}{Q} = \frac{8D^3 n}{Gd^4}$

$$n = \varphi \times \frac{Gd^4}{8D^3} = 1 \times \frac{8\,500 \times 9^4}{8 \times 80^3} \simeq \mathbf{13{,}6.}$$

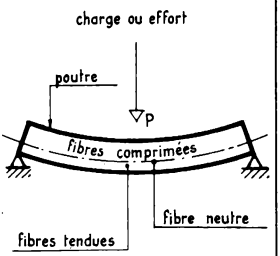
3. Flèche :
$f = \varphi Q = 1 \times 100 = \mathbf{100}\ mm.$

4. Pas (admettre un jeu = 0,1 d entre spires sous charge maximum) :
$L_1 = 1{,}1\ nd = 1{,}1 \times 13{,}6 \times 9 \simeq 134{,}6\ mm.$
$L_0 = L_1 + f = 134{,}6 + 100 = 234{,}6\ mm.$

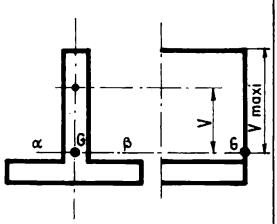
$$\text{pas} = p = \frac{234{,}6}{13{,}6} = \mathbf{17{,}2}\ mm.$$

M. 65 FLEXION PLANE

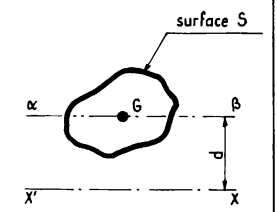
①



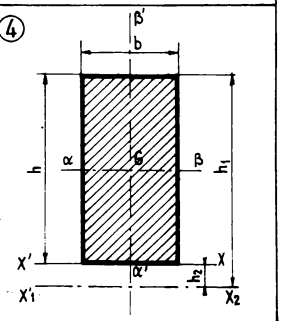
②



③



④



CONDITIONS DE FLEXION PLANE

- La poutre doit posséder un plan de symétrie ;
- L'axe de la poutre doit être droit ou très peu courbé ;
- Toutes les forces doivent agir dans le plan de symétrie ;
- Sous l'influence de P la poutre se courbe, les fibres de la partie convexe s'allongent, celles de la partie concave se raccourcissent (fig. 1) ; entre ces fibres tendues et ces fibres comprimées est une zone de fibres neutres ne subissant pas de variations de longueur ;
- Les déformations ne doivent pas dépasser la limite élastique.

Axe neutre. Lieu géométrique des centres de gravité des sections droites de la poutre.

Fibre moyenne. Fibre située dans un plan contenant l'axe neutre et perpendiculaire au plan de symétrie. Elle ne subit aucun allongement, ne supporte aucune fatigue : c'est une fibre neutre.

Allongement ou raccourcissement subi par une fibre. Il est proportionnel à la distance v de cette fibre à la fibre neutre (fig. 2).

Cas où le système des forces extérieures se réduit à un couple.

ρ rayon de courbure, c'est le rayon du cercle qui se confond avec la courbe de déformation, au point considéré (voir M. 70).

$I_{\alpha\beta}$ moment d'inertie de la section de la poutre par rapport à un axe de son plan, perpendiculaire au plan de symétrie et passant par le centre de gravité de la section.

$\mathcal{M}_f$ moment fléchissant.

Equation de déformation.

$$\mathcal{M}_f = \frac{EI_{\alpha\beta}}{\rho}$$

Equation de contrainte.

$$\mathcal{M}_f = \frac{R \cdot I_{\alpha\beta}}{v}$$

R est la plus petite des résistances pratiques à l'extension ou à la compression.

Evaluer $\mathcal{M}_f$ en *mm.kgf*.

Prendre pour v la valeur v_{max}.

Remarque importante. Les fibres voisines de la fibre neutre ne travaillent pas ou peu ; intérêt à évider la poutre et à reporter les fibres centrales sur celles qui sont éloignées de la fibre neutre. Exemples : poutrelles en I, U, etc.

Quelques valeurs courantes de $I_{\alpha\beta}$

Relation entre $I_{\alpha\beta}$ et $I_{x'x}$ (X'X étant parallèle à αβ) (fig. 3).

$$I_{x'x} = I_{\alpha\beta} + Sd^2.$$

Rectangle (fig. 4) :

$$I_{\alpha\beta} = \frac{bh^3}{12} ; \quad I_{\alpha'\beta'} = \frac{hb^3}{12} ; \quad I_{x'x} = \frac{bh^3}{3} ; \quad I_{x_1x_2} = \frac{bh_1^3 - bh_2^3}{3}.$$

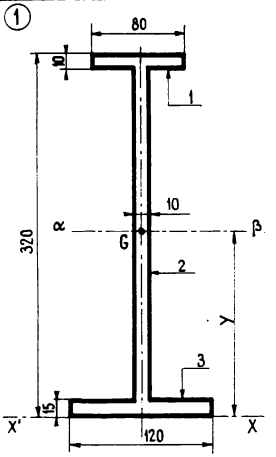
Carré : $I_{\alpha\beta} = \frac{c^4}{12}$ (c = côté du carré).

Cercle : $I_{\alpha\beta} = \frac{\pi d^4}{64}$.

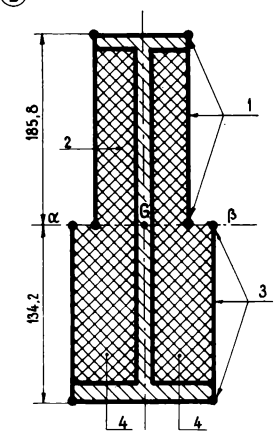
Couronne circulaire : $I_{\alpha\beta} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$.

Surface décomposable en rectangles. Le moment d'inertie de cette surface par rapport à un axe, est la somme des moments d'inertie des différents éléments par rapport à cet axe.

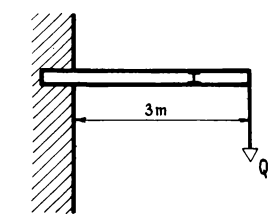
①



②



③



EXEMPLE DE CALCUL

Quelle charge maxima Q peut-on suspendre à l'extrémité libre d'une poutre encastrée à l'autre extrémité et constituée par un profilé en I pesant 40 *kgp* au mètre linéaire (fig. 3)? Les dimensions de la section sont données en *mm* (fig. 1). La distance entre l'extrémité libre et l'encastrement est de 3 *m*. Contrainte maximum admissible : 10 kgf/mm^2.

Solution.

Détermination du centre de gravité G (fig. 1) (voir M. 40).

Rectangle 1	Rectangle 2	Rectangle 3	Surface totale
$S_1 = 10 \times 80 = 800$	$S_2 = 10 \times 295 = 2950$	$S_3 = 15 \times 120 = 1800$	$S = 5\,550$
$_1(\grave{a}x'x) = 315$	$d_2(\grave{a}x'x) = 162,5$	$d_3(\grave{a}x'x) = 7,5$	$d(\grave{a}x'x) = y\ ?$
$\mathcal{M}_{x'x}(S_1) = 252000$	$\mathcal{M}_{x'x}(S_2) = 479375$	$\mathcal{M}_{x'x}(S_3) = 13500$	$\mathcal{M}_{(total)} = 744\,875$

$$y = \frac{\mathcal{M}_{total}}{S} = \frac{744\,875}{5\,550} = 134,2.$$

Détermination de $I_{\alpha\beta}$ (fig. 2).

Calculer, par rapport à l'axe αβ les moments d'inertie :

I_1, I_3, I_2, I_4 des rectangles 1, 3, 2, 4 de dimensions $80 \times 185,8$; $120 \times 134,2$; $70 \times 175,8$; $110 \times 119,2$

N°	$\frac{b}{3}$	h	h^3	I (+)	I (—)	$I_{\alpha\beta}$
1	$\frac{80}{3}$	185,8	6 400 000	171 000 000		
3	40	134,2	2 410 000	96 400 000		+ 267 400 000
2	70/3	175,8	5 420 000		126 500 000	
4	110/3	119,2	1 690 000		61 970 000	— 188 470 000

$I_{\alpha\beta} = 267\,400\,000 - 188\,470\,000 = \mathbf{78\,930\,000}\ mm^4$.

Calcul de la charge Q.

$$\mathcal{M}_t \leqslant R \cdot \frac{I_{\alpha\beta}}{v} \qquad v = 185,8 \qquad R \leqslant 10\ kgf/mm^2$$

$$\mathcal{M}_t = Q \cdot L + \frac{P \cdot L}{2}$$

Q = charge à suspendre en *kgp*
P = poids de la poutre en *kgp*
L = longueur de la poutre en *mm*

$$\mathcal{M}_t = 3\,000Q + \frac{120 \times 3\,000}{2} = 3\,000(Q + 60)$$

$$3\,000(Q + 60) \leqslant 10 \times \frac{7\,893 \times 10^4}{185,8} \qquad \mathbf{Q \leqslant 1\,357}\ kgp.$$

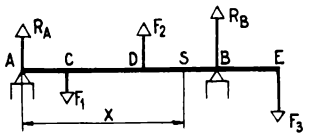
Remarques

— Les calculs numériques sont faits à la règle à calcul.
— Contrainte maximum au cisaillement (section d'encastrement) :

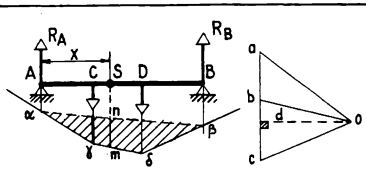
$n_s = \frac{1\,477}{5\,550} \simeq 0,27\ kgf/mm^2$ (négligeable devant la contrainte de flexion).

M. 67 MOMENTS FLÉCHISSANTS (I)

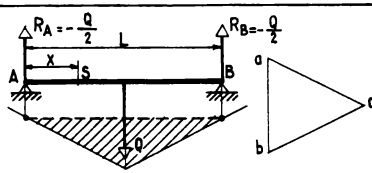
①



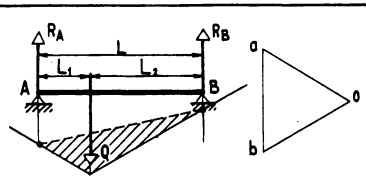
②



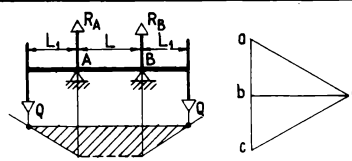
③



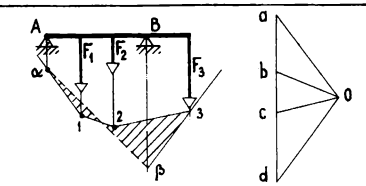
④



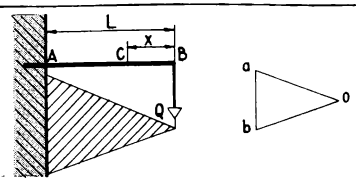
⑤



⑥



⑦



Définition de $\mathcal{M}_f$ (moment fléchissant) : somme algébrique des moments de toutes les forces (actions et réactions) situées ***d'un côté de cette section*** (fig. 1).

$\mathcal{M}_f$ en S telle que AS = x

$$\mathcal{M}_f = -R_A x + F_1(x - AC) - F_3(x - AD)$$

Détermination graphique de M_f (fig. 2).

— construire le dynamique des forces extérieures ;
— construire le funiculaire correspondant ;
— mener la fermeture $\alpha\beta$.
(α : 1er appui ; β : 2e appui).

On a : $\mathcal{M}_f$ en S = mn · d.

mn est mesuré à l'échelle des longueurs.
d distance polaire, mesurée à l'échelle des forces.

POUTRE SUR 2 APPUIS DE NIVEAU et supportant des charges concentrées (Fig. 3). **Charge au milieu.**

$$\mathcal{M}_f \text{ en S} = \frac{Q}{2} \cdot x \qquad R_A = R_B = \frac{-Q}{2}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_f \text{ maxi} = \frac{QL}{4}}$$

(Fig. 4). **Charge en un point quelconque.**

$$R_A = -Q\frac{L_2}{L} \qquad R_B = -Q\frac{L_1}{L}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_f \text{ maxi} = \frac{QL_1L_2}{L}}$$

(Fig. 5). **Charges symétriques en porte-à-faux.**

$$R_A = R_B = -Q \qquad \boxed{\mathcal{M}_f \text{ maxi} = QL_1}$$

(Fig. 6). **Charges posées d'une manière quelconque.** Dans le cas de la figure 6 $\mathcal{M}_f$ maxi a lieu à l'appui B.

POUTRE ENCASTRÉE A 1 EXTRÉMITÉ et chargée à l'autre (fig. 7).

$$\mathcal{M}_f \text{ en C} = -Qx \qquad \boxed{\mathcal{M}_f \text{ maxi} = QL}$$

Application. Déterminer la section d'une poutrelle IPN encastrée à une extrémité :
— longueur libre 3 *m* ;
— charge à l'extrémité 900 *kgf* ;
— R = 10 *kgf/mm²*.

Solution. En approximation, négliger le poids de la poutrelle ;

$\mathcal{M}_f$ maxi = 3 × 300 = 900 *kgf*.

$$900 \cdot 10^3 \leqslant R \times \frac{I_{\alpha\beta}}{v} \; ; \qquad \frac{I_{\alpha\beta}}{v} \geqslant 9 \cdot 10^4 \; mm^3.$$

L'existant IPN le plus proche mesure 150 × 70 × 6 avec $\frac{I_{\alpha\beta}}{v} = 97{,}8 \cdot 10^3$, poids 16 *kgp/m*.

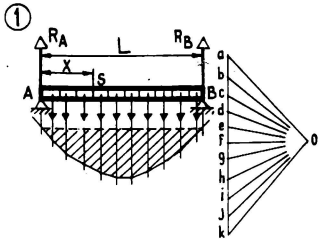
En tenant compte du poids :

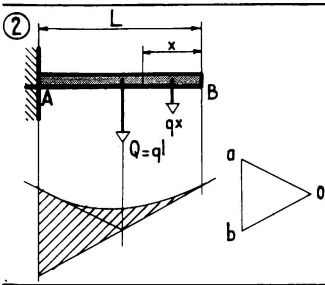
$\mathcal{M}_f$ maxi = (1,5 × 48) + 900 = 972 *m.kgp*

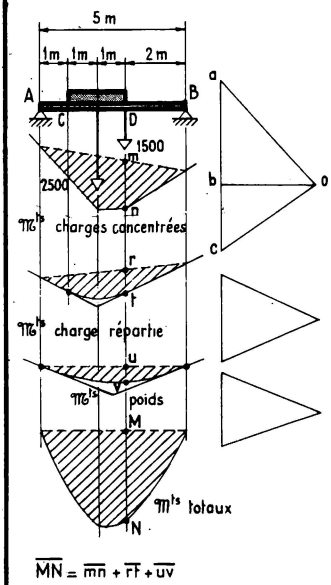
et $\quad n = \dfrac{972\,000}{97{,}8 \cdot 10^3} > 10 \; kgf/mm^2.$

Prendre le IPN au-dessus, soit 160 × 74 × 6,3.

MOMENTS FLÉCHISSANTS (2) — M. 68







$\overline{MN} = \overline{mn} + \overline{rt} + \overline{uv}$

Charges uniformément réparties.

POUTRE SUR 2 APPUIS DE NIVEAU (fig. 1).

En décomposant la poutre en éléments de longueurs égales, on obtient un polygone funiculaire. Lorsque le nombre d'éléments devient très grand le polygone tend vers une **courbe funiculaire** qui, dans le cas d'une charge uniformément répartie, est une **parabole.**

Charge unitaire $q = \frac{Q}{L}$ (q en *kgp/m*).

$\mathcal{M}_f$ en $S = R_A \cdot x - qx \times \frac{x}{2} = \frac{Q}{2}x - q\frac{x^2}{2}$.

Equation d'une parabole ayant $\mathcal{M}_f$ pour ordonnée.

$\mathcal{M}_f$ maxi pour $x = \frac{L}{2}$

$$\boxed{\mathcal{M}_f \text{ maxi} = \frac{QL}{8}} \qquad \mathcal{M}_f = \frac{Q}{2}\cdot\frac{L}{2} - \frac{Q}{L}\cdot\frac{L^2}{8} = \frac{QL}{4} - \frac{QL}{8} = \frac{QL}{8}$$

POUTRE ENCASTRÉE A 1 EXTRÉMITÉ (fig. 2).

$$\boxed{\mathcal{M}_f \text{ maxi} = \frac{QL}{2}} \qquad \mathcal{M}_f \text{ maxi pour } x = L$$

$$\mathcal{M}_f \text{ en } C = qx \times \frac{x}{2} = \frac{qx^2}{2}$$

Charges concentrées et réparties.

Tracer d'après figure 3 :

— le diagramme des $\mathcal{M}_f$ dus aux charges concentrées ;

— les diagrammes des $\mathcal{M}_f$ dus aux charges réparties ;

— le diagramme résultant (représentant les $\mathcal{M}_f$ totaux) en faisant la somme des ordonnées en différents points des diagrammes obtenus.

Application (fig. 3). Une poutre de 5 *m* de portée repose sur deux appuis de niveau à ses extrémités A et B. Elle supporte une charge concentrée de 2 500 *kgp* à 2 *m* de l'appui A, et une charge concentrée de 1 500 *kgp* à 3 *m* de ce même appui A. De plus elle supporte une charge uniformément répartie de 2 000 *kgp* sur une longueur de 2 *m* à partir d'un point situé à 1 *m* de A. Le poids propre de la poutre est évalué à 500 *kgp/m*. Faire le diagramme des moments fléchissants totaux.

Solution graphique (fig. 3).

$\mathcal{M}_f$ total (maxi) = 7 600 *m.kg* (mesuré).

Solution par le calcul.

$$R_A = \frac{500 \times 5}{2} + \frac{4\,500 \times 3}{5} + \frac{1\,500 \times 2}{5} = 4\,550 \text{ kgp.}$$

$\mathcal{M}_f$ maxi a lieu dans une section S située entre C et D à une distance *x* de A

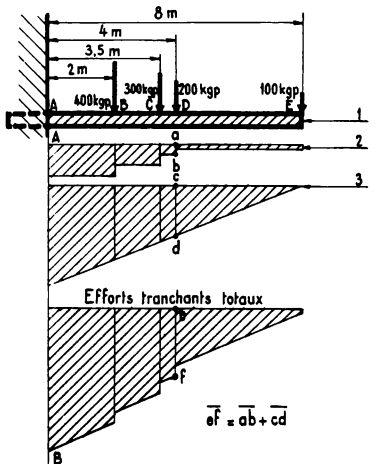
$$\mathcal{M}_f \text{ (en S)} = 4\,550\,x - 500\frac{x^2}{2} - 1\,000\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 2\,500\,(x-2) = -50\,(15\,x^2 - 61\,x - 90).$$

Le maximum de cette fonction a lieu pour $x = \frac{61}{30}$ (voir Doc. 11).

$$\mathcal{M}_f \text{ maxi} = -50\left[15 \times \left(\frac{61}{30}\right)^2 - 61 \times \frac{61}{30} - 90\right] = 7\,600\ m.kg.$$

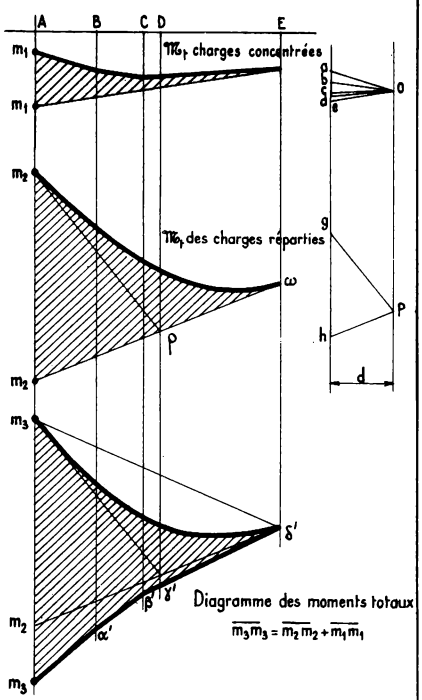
M. 69 EFFORTS TRANCHANTS ET MOMENTS FLÉCHISSANTS

①



1. Charge uniformément répartie : 400 kgp/m
2. Efforts tranchants dûs aux charges concentrées
3. Efforts tranchants dûs aux charges réparties

②



Effort tranchant.

On appelle effort tranchant dans une section droite d'une poutre la somme algébrique des projections sur le plan de section de toutes les forces situées d'un côté de cette section.

Problème.

Soit une console L = 8 *m* portant une charge répartie de 400 *kgp/m*, y compris le poids de la console, et quatre charges de 400 *kgp*, 300 *kgp*, 200 et 100 *kgp* à 2 *m*, 3,5 *m*, 4 *m* et 8 *m* de la section d'encastrement.

1. Trouver par le calcul en chaque point A B C D E :

a) Les efforts tranchants et les moments fléchissants dus aux charges concentrées;

b) Les efforts tranchants, et les moments fléchissants dus aux charges réparties.

2. Tracer l'épure des efforts tranchants et des moments fléchissants. Echelle des longueurs : 2 *cm* par *m*, des forces : 2 *cm* pour 1 000 *kgp*, moments : 5 *mm* pour 1 000 *m.kgp*.

Solution par le calcul.

Efforts tranchants des charges concentrées :

T entre A et B = 400 + 300 + 200 + 100 = 1 000 *kgf*.
T entre B et C = 300 + 200 + 100 = 600 *kgf*.
T entre C et D = 200 + 100 = 300 *kgf*.
T entre D et E = 100 *kgf*.

Efforts tranchants des charges réparties :

Soit une section S à une distance x de A :
T en S = (8 — x) × 400 *kgp*.
T en A = 8 × 400 = 3 200 *kgf*.
T en B = 6 × 400 = 2 400 *kgf*.
T en C = 4,5 × 400 = 1 800 *kgf*.
T en D = 4 × 400 = 1 600 *kgf*.
T en E = 0 *kgf*.

Efforts tranchants totaux :

T en A = 1 000 + 3 200 = 4 200 *kgf*.
T en B = 1 000 + 2 400 = 3 400 *kgf*.
T en C = 600 + 1 800 = 2 400 *kgf*.
T en D = 300 + 1 600 = 900 *kgf*.
T en E = 100 *kgf*.

Moments fléchissants des charges concentrées :

$\mathcal{M}_f$ en A = 2 × 400 + 3,5 × 300 + 2 × 200 + 8 × 100 = 3 450 *m.kgf*.
$\mathcal{M}_f$ en B = 1,5 × 300 + 2 × 200 + 6 × 100 = 1 450 *m.kgf*.
$\mathcal{M}_f$ en C = 0,5 × 200 + 4,5 × 100 = 550 *m.kgf*.
$\mathcal{M}_f$ en D = 4 × 100 = 400 *m.kgf*; $\mathcal{M}_f$ en E = 0.

Moments fléchissants des charges réparties :

$\mathcal{M}_f$ en S = $\frac{8-x}{2}$ × 400 (8 — x) d'où :
$\mathcal{M}_f$ en A = 4 × 3 200 = 12 800 *m.kgf*. (x = 0).
$\mathcal{M}_f$ en B = 3 × 2 400 = 7 200 (x = 2).
$\mathcal{M}_f$ en C = 2,25 × 1 800 = 4 050.
$\mathcal{M}_f$ en D = 2 × 1 600 = 3 200.
$\mathcal{M}_f$ en E = 0.

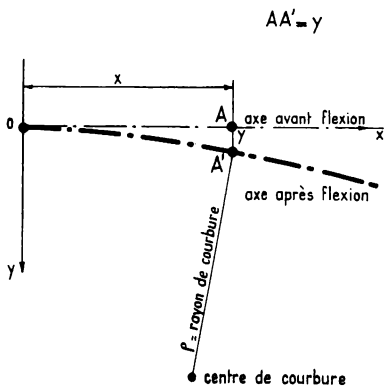
Moments fléchissants totaux :

En A = 16 250 *m.kgf*; en C = 4 600.
En B = 8 650 *m.kgf*; en D = 3 600; en E = 0.

Solution graphique : épures (fig. 1 et 2).

DÉFORMATION DUE À LA FLEXION | M. 70

①



Equation de déformation.

$$\mathcal{M}_f = \frac{E \cdot I_{\alpha\beta}}{\rho} = E \cdot I_{\alpha\beta} \cdot y''$$

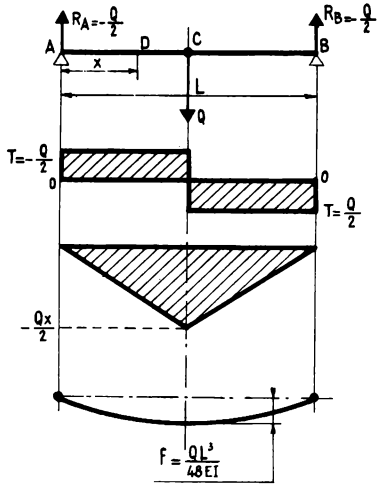
$\mathcal{M}_f$ = moment fléchissant.
E = module d'élasticité ou nombre de YOUNG.
$I_{\alpha\beta}$ = moment d'inertie de la section droite par rapport à un axe passant par le centre de gravité.
ρ = rayon de courbure de l'axe de la poutre au point considéré.
y'' = dérivée seconde de l'ordonnée d'un point de l'axe fléchi.

Flèche. Evaluer $\mathcal{M}_f$ en fonction de x = distance d'un appui à un point de l'axe fléchi.
La primitive définie de y'' donnera y'. La primitive définie de y' donnera y. Le maximum de y est la flèche f.

Équation de l'axe fléchi.

Application (fig. 2).
Trouver l'équation de la courbe de flexion d'une poutre reposant à ses deux extrémités sur deux appuis de niveau à distance L et supportant en son milieu une charge concentrée Q.

②



1° **Réactions aux appuis :** $\overline{R}_A = \overline{R}_B = -\frac{\overline{Q}}{2}$

2° **Efforts tranchants.**

Entre A et C : $\overline{T} = \overline{R}_A = -\frac{\overline{Q}}{2}$

Entre C et B : $\overline{T} = \overline{Q} + \overline{R}_A = Q - \frac{Q}{2} = \frac{Q}{2}$

3° **Moments fléchissants.**

En D (distance x de A) $\mathcal{M}_f = R_A \cdot x = -\frac{Q}{2} x$

(variation linéaire) $\mathcal{M}_f$ maxi $= \left|\frac{QL}{4}\right|$

Remarque : T est la dérivée de $\mathcal{M}_f$.

4° **Equation de la courbe de flexion :**

$$\mathcal{M}_f = E \cdot I \cdot y'' = -\frac{Q}{2} x$$

$$EIy' = -\frac{Q}{4} x^2 + C_1 \text{ (voir Doc. 13)}$$

Déterminer la constante C_1 en cherchant une valeur de y' pour une valeur x connue, $y' = 0$ lorsque $x = \frac{L}{2}$ (y' donne la tangente de l'angle formé par une horizontale et une droite tangente à l'axe fléchi au point considéré).

$$0 = -\frac{Q}{4} \cdot \frac{L^2}{4} + C$$

d'où $C = \frac{QL^2}{16}$ et $EIy' = -\frac{Q}{4} x^2 + \frac{QL^2}{16}$

$$EIy = -\frac{Q}{12} x^3 + \frac{QL^2 x}{16} + C_2 \text{ (voir Doc. 13)}$$

$y = 0$ pour $x = 0$, d'où $C_2 = 0$.

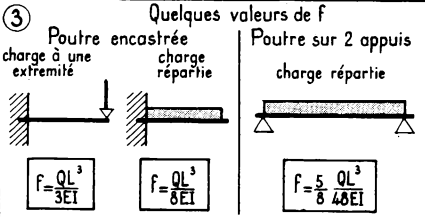
$$EIy = -\frac{Q}{12} x^3 + \frac{QL^2}{16} x.$$

$$\boxed{y = -\frac{Q}{48EI}(4x^3 - 3L^2x).}$$ cubique que l'on peut construire.

5° **Flèche f :** $f = y$ maxi pour $x = \frac{L}{2}$.

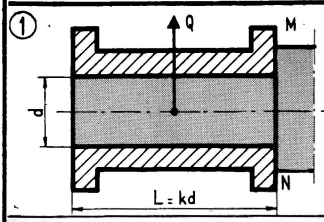
$$f = -\frac{Q}{48\,EI}\left(4\frac{L^3}{8} - 3\frac{L^3}{2}\right) \qquad \boxed{f = \frac{QL^3}{48EI}}$$

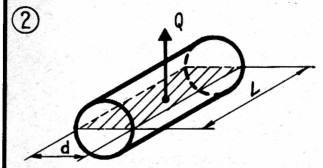
③ Quelques valeurs de f



APPLICATIONS DE LA FLEXION

CALCUL DES PIÈCES DE MACHINES

① 

② 

Calcul d'un tourillon. Exemple.

$Q = 400\ kgf$; $k = 1,5$; $R = 10\ kgf/mm^2$.
$f = 0,05$; $N = 480\ tr/mn$; $p = 50\ kgf/cm^2$.
$A = 12\,000\ kgm/s/m^2$.

Résistance :

$$d_1 > \sqrt{\frac{5 \times 1,5 \times 400}{10}} \quad \text{soit } d_1 > 17,3\ mm.$$

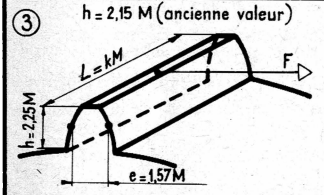
Graissage :

$$d_2 > 10\sqrt{\frac{400}{1,5 \times 50}} \quad \text{soit} \quad d_2 > 23,1\ mm.$$

Echauffement :

$$d_3 > \frac{50}{3} \times 3,14 \times 0,05 \times \frac{400 \times 480}{1,5 \times 12\,000}$$

soit $d_3 > 28\ mm$.
On pourra prendre d = 30 mm.

③ 

Calcul d'un module. Exemple.

$P = 3\ ch$; $D_p = 80\ mm$; $N = 360\ tr/mn$.
$k = 10$; $R = 10\ kgf/mm^2$.

$$F = \frac{1\,432 \times 3}{0,08 \times 360} = 149\ kgf.$$

$$M > 2,34\sqrt{\frac{149}{10 \times 10}}.$$

$M > 2,85$.
On prend le module normalisé supérieur M = 3.

Diamètre d'un tourillon d'extrémité (fig. 1).

Condition de résistance.

$$\mathcal{M}_f < R\,\frac{I}{v}.$$

Considérer le tourillon comme une poutre encastrée suivant MN (fig. 1).

$$\frac{QL}{2} < R_e\,\frac{\pi d^3}{32}; \qquad \frac{\pi d^3}{32} \simeq \frac{d^3}{10}; \qquad d^3 > \frac{5QL}{R_e};$$

$L = kd$; en général $1 < k < 3$, et $d^3 > \dfrac{5Qkd}{R_e}$:

$$\boxed{d > \sqrt{\frac{5kQ}{R}}.} \quad (1)$$

R résistance pratique du métal.

Condition de graissage (fig. 2).

p = pression maximum sur le coussinet (en kgf/cm^2), une pression trop élevée s'opposerait à la formation continue du film d'huile (expulsion du lubrifiant).

il faut : $p > \dfrac{100Q}{dL}$ (d et L en mm, Q en kgf), $L = kd$.

$$\boxed{d > 10\sqrt{\frac{Q}{k \cdot p}}.} \quad (2)$$

p dépend de la vitesse de rotation, du mode de graissage. Elle est déterminée par l'expérience.
Généralement : $6 < p < 150\ kgf/cm^2$.
En moyenne on peut adopter $p \simeq 50\ kgf/cm^2$.

Condition d'échauffement limite.

La quantité de chaleur dégagée par le frottement, par seconde et par mètre carré de la surface projetée (L · d), peut être dissipée si elle reste inférieure à une valeur limite correspondant à une puissance A (en kgm/s par m^2) donnée par l'expérience.

$5\,000\ kgm/s/m^2 < A < 20\,000\ kgm/s/m^2$.

Puissance absorbée par le frottement :

$$P = f \cdot Q. \cdot \frac{\pi dN}{60}$$

P en kgm/s ; d en m ; N en tr/mn ; f = coefficient de frottement, il faut $P < AS$; S en m^2 ; $S = L \cdot d = kd^2$.

$$\pi f \cdot Q\,\frac{dN}{60} < kd^2A; \qquad d > \frac{\pi fQN}{60kA} \qquad (\text{d en } m),$$

soit en mm $\quad \boxed{d > \dfrac{50}{3} \cdot \pi \cdot f \cdot \dfrac{QN}{kA}.}$ (3)

Diamètre adopté : **prendre la plus grande des valeurs données par les formules (1), (2), (3).**

Module M d'une roue dentée (fig. 3).

La dent est considérée comme une poutre encastrée dans le cylindre de pied. On considère une section d'encastrement L × e. L'effort tangentiel F calculé sur le diamètre primitif D_p est supposé appliqué à l'extrémité libre d'une seule dent.

$\mathcal{M}_f < R \cdot \dfrac{I}{v}$; $\mathcal{M}_f = F \cdot h$; $h = 2,25M$ (*NF.E23-011*).

$F \cdot h < R \cdot \dfrac{L \cdot e^2}{6}$; $F \times 2,25M < R \cdot \dfrac{k \cdot M \times 1,57^2 \times M^2}{6}$.

F en kgf, R en kgf/mm^2.
M en mm, $6 < k < 16$.

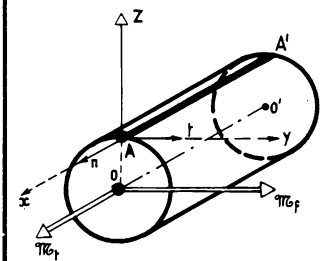
$2,25 \cdot F < \dfrac{1,57^2}{6} \cdot k \cdot RM^3$.

$$\boxed{M > 2,34\sqrt{\frac{F}{k \cdot R}}.} \qquad F = \frac{1\,432 \cdot P}{D_p \cdot N}$$

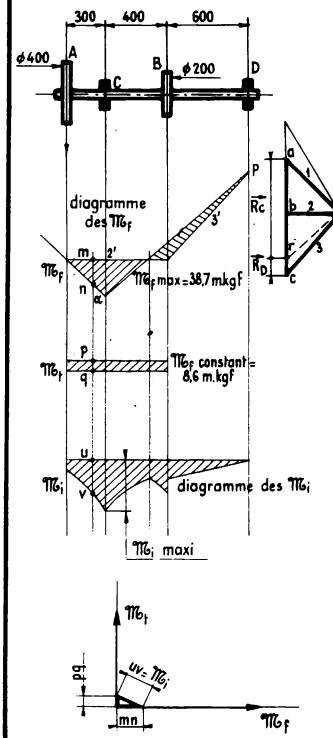
P en *ch*.
N : tr/mn.
D_p en m.

SOLLICITATIONS COMPOSÉES (I) — M. 72

①



②



Flexion et torsion combinées.

Arbre plein soumis à un moment de torsion $\mathcal{M}_t$ et à un moment de flexion $\mathcal{M}_f$ (fig. 1).

Dans la fibre AA′ en contact avec le plan tangent à l'arbre :

$$n_x = \mathcal{M}_f \frac{v}{I_{\alpha^2}} ; \qquad t_y = \mathcal{M}_t \frac{v}{I_o} ; \qquad n_z = 0.$$

On démontre que

$$n_{maxi} = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4t^2}}{2} \text{ et } t_{maxi} = \frac{1}{2}\sqrt{n^2 + 4t^2}.$$

Pour $n_{max} < R$; $t_{max} < R_g$; $R_g = R/2$; $I_o = 2I\alpha\beta$. On obtient :

$$n_{maxi} = \frac{\mathcal{M}_f + \sqrt{\mathcal{M}_f^2 + \mathcal{M}_t^2}}{2\,\frac{I_{\alpha^2}}{v}}$$

et

$$t_{maxi} = \frac{\sqrt{\mathcal{M}_f^2 + \mathcal{M}_t^2}}{\frac{I_o}{v}}.$$

Moment idéal de flexion

$$\mathcal{M}_{if} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{M}_f + \sqrt{\mathcal{M}_f^2 + \mathcal{M}_t^2}\right).$$

Moment idéal de torsion $\mathcal{M}_{it} = \sqrt{\mathcal{M}_f^2 + \mathcal{M}_t^2}$.

$\mathcal{M}_{it} > \mathcal{M}_{if}$, la grandeur $\sqrt{\mathcal{M}_f^2 + \mathcal{M}_t^2}$ joue donc indifféremment le rôle d'un moment de torsion ou de flexion. On a intérêt à adopter (sécurité plus grande, calcul plus commode) cette valeur dans une seule formule.

$$\mathcal{M}_i \leqslant R\,\frac{I_{\alpha^2}}{v} \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{M}_i = \sqrt{\mathcal{M}_f^2 + \mathcal{M}_t^2}.$$

Application (fig. 2).

Un arbre de transmission commandé par une poulie motrice A transmet une puissance de 6 *ch* à 500 *tr/mn*, à une poulie réceptrice B. Les brins des courroies sont parallèles, verticaux et de même sens. On admet que les tensions dans les brins tendus sont doubles de celles dans les brins mous. On néglige les poids de l'arbre et des poulies ainsi que les frottements. Tracer les diagrammes des $\mathcal{M}_f$, $\mathcal{M}_t$, $\mathcal{M}_i$. Déterminer le diamètre de l'arbre (prendre R = 8 *kgf/mm²*).

Solution.

Force tangentielle sur A :

$$F_A = \frac{1\,432P}{DN} = \frac{1\,432 \times 6}{0{,}4 \times 500} \simeq 43 \text{ kgf}.$$

$F = T - t$ et $T = 2t$

$t = 43$, $T = 86$ *kgf*. Effort sur l'arbre en A = 129 *kgf*.

Force tangentielle sur B : $F_B = \dfrac{43 \times 200}{150} = 57{,}3$ *kgf*.

$t' = 57{,}3$, $T' = 114{,}6$. Effort sur l'arbre en B $\simeq$ 172 *kgf*.

Réactions des paliers :

$$129 \times 0{,}3 - 172 \times 0{,}4 + R_D \times 1 = 0.$$

$R_D \simeq 30$ *kgf* $R_C \simeq 129 + 172 - 30 \simeq 271$ *kgf*.

$\mathcal{M}_f$ maxi (en C) : $129 \times 0{,}3 = 38{,}7$ *m.kgf*.

$\mathcal{M}_t = 43 \times 0{,}2 = 8{,}6$ *m.kgf*.

$\mathcal{M}_i = \sqrt{38{,}7^2 + 8{,}6^2} \simeq 39{,}7$ *m.kgf*.

Diamètre de l'arbre :

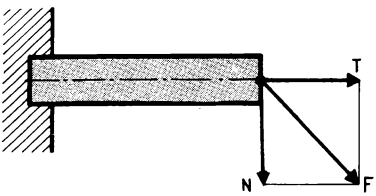
$$39\,700 \leqslant 8 \times \frac{\pi d^3}{32} ; \qquad \left(\frac{\pi d^3}{32} \simeq \frac{d^3}{10}\right).$$

$$d \geqslant \frac{10}{2} \cdot \sqrt[3]{397} ; \; d \geqslant 5 \times 7{,}3 ; \; d \simeq 36{,}5, \text{ prendre } d = 40 \text{ mm}.$$

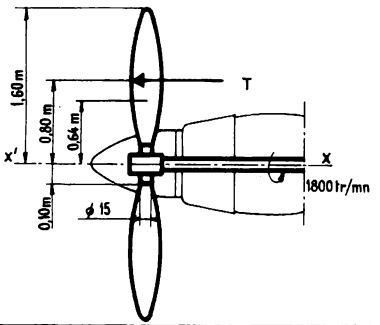
Diagrammes (voir fig. 2).

M. 73 SOLLICITATIONS COMPOSÉES (2)

①



②



Flexion et traction (ou compression) simultanées (fig. 1).

$\vec{F}$ oblique sur l'axe de la poutre et située dans le plan de symétrie ;

$\vec{F} = \vec{N} + \vec{T}$;

$\vec{T}$ composante de traction (ou de compression) ;

$\vec{N}$ force normale de flexion.

$n_1 = \frac{T}{S}$; $n_2 = \mathcal{M}_f \frac{v}{I_{\alpha\beta}}$ $\boxed{n_2 + n_1 < R.}$

$\boxed{\mathcal{M}_f \frac{v}{I_{\alpha\beta}} + \frac{T}{S} < R.}$ (voir M. 56 et 65)

Traction et torsion simultanées.

n contrainte de traction ;
t contrainte de torsion sur périphérie pièce ;
F fatigue ou contrainte résultante en kgf/mm^2.

$n = \frac{T}{S}$ (voir M. 56) ; $t = \mathcal{M}_t \frac{v}{I_0}$ (voir M. 63).

Pour un arbre cylindrique plein :

$$t = \mathcal{M}_t \cdot \frac{16}{\pi d^3} \simeq \frac{4\mathcal{M}_t}{Sd}.$$

1. Formule de SAINT-VENANT :

$$\boxed{F = \frac{3}{8} n + \frac{5}{8}\sqrt{n^2 + 4t^2}.}$$

2. Formule de SEIGLE ET CRÉTIN :

$$\boxed{F = \frac{1}{5} n + \frac{4}{5}\sqrt{n^2 + 4t^2}.}$$

avec $0{,}6R \leqslant F_{max} \leqslant 0{,}65R$.

Torsion et cisaillement.

Les contraintes sont de même nature (glissement).

t_1 contrainte de cisaillement $= \frac{T}{S}$ (voir M. 62).

t_2 contrainte de torsion $= \mathcal{M}_t \frac{v}{I_0}$ (voir M. 63).

Il faut $t_2 + t_1 < R_g$.

soit : $\boxed{\mathcal{M}_t \frac{v}{I_0} + \frac{T}{S} < R_g.}$

Pour un arbre cylindrique plein (voir ci-contre) : $\frac{4\mathcal{M}_t}{Sd} + \frac{T}{S} < R_g$.

Remarque.

Si $s = \frac{\pi d^2}{4}$; $I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$;

$v = \frac{d}{2}$ et $\mathcal{M}_t = F \cdot x$ (voir M. 63).

On a : $\frac{16}{\pi d^3} \cdot Fx + \frac{4T}{\pi d^2} \leqslant R_g$,

soit : $\boxed{\pi R_g d^3 - 4Td - 16Fx \geqslant 0.}$

Cette équation incomplète du 3e degré peut être résolue par approximations.

Prendre $d > \sqrt[3]{\frac{16F \cdot x}{\pi R_g}}$

(T négligé en première approximation) et vérifier.

Application (fig. 2). Quel serait le diamètre maximum à donner à un arbre d'hélice tractive bipale d'avion ?

Puissance transmise 3 000 *ch* à 1 800 *tr/mn* ;
Poids d'une pale 50 *kgp* ;
Centre de gravité à 0,64 *m* de l'axe x'x de rotation.
Admettre que l'effort de traction est parallèle à x'x.
Section d'encastrement d'une pale dans le moyeu : cercle $\phi = 150$ *mm*.
Rendement de l'hélice : 0,8.
Vitesse de l'avion 450 *km/h*.

Solution.

Vitesse de l'avion $v = 125$ *m/s*.
Effort de traction $T = 3\,000 \times 75 \times 0{,}8 = 1800$ *kgf*.
Moment de flexion

$\mathcal{M}_f = \frac{1\,800}{2} \times (0{,}8 - 0{,}10) = 630$ *m.kgf*.

Force centrifuge sur une pale :

$F = M\omega^2 r = \frac{50}{9{,}81} \times \left(\frac{1\,800\pi}{30}\right)^2 \times 0{,}64 \simeq 115\,600$ *kgf*.

Contrainte flexion-traction à la section d'encastrement :

$630 \times 10^3 \times \frac{10}{150^3} + \frac{115\,600 \times 4}{3{,}14 \times 150^2} \simeq 8{,}4$ *kgf/mm²*.

Diamètre de l'arbre : $\mathcal{M}_i = \sqrt{\mathcal{M}_f^2 + \mathcal{M}_t^2}$.

$\mathcal{M}_f = 630$ *m.kgf* ;

$\mathcal{M}_t = \frac{716P}{N} = \frac{716 \times 3\,000}{1\,800} = 1\,193$ *m.kgf*.

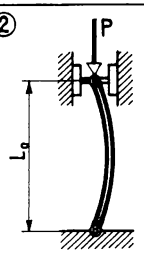
$\mathcal{M}_i \simeq 1\,345{,}5$ *m.kgf* et $1\,345{,}5 \times 10^3 < R_g \frac{d^3}{5}$.

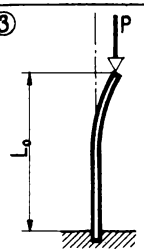
En prenant $R_g = 10$ *kgf/mm²* : $d \geqslant 90$ *mm*.

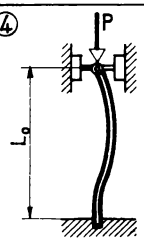
FLAMBEMENT (I)

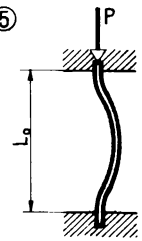
M. 74

①

② 

③ 

④ 

⑤ 

Phénomène de flambement.

1er cas. *Flambement local.* Élément droit, de profilé ou de tube, d'un matériau isotrope de longueur réduite et soumis à une force de compression croissante.

A partir d'une certaine force les parois de l'élément se cloquent ou se plissent, l'élément s'écrase en accordéon.

2e cas. *Flambement général.* Même élément que le précédent mais de grande longueur et élancé.

A partir d'une certaine charge la fibre moyenne cesse d'être rectiligne. Puis sous un effort croissant la pièce se plie en deux (fig. 1).

Formule d'EULER (pièces longues) : $\boxed{n_\lambda = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}}$

n_λ = contrainte de flambement général pour un élancement λ.

$\lambda = \frac{L}{\rho} = \frac{\text{longueur libre de flamblement}}{\text{rayon minimum de giration de la section}}$.

$\rho = \sqrt{\frac{I_{\alpha\beta}}{S}} = \sqrt{\frac{\text{moment d'inertie de la section}}{\text{surface de la section}}}$.

E = module d'élasticité du métal (voir M. 56).

Application aux pièces chargées debout.

$$n_\lambda = \frac{\pi^2 \cdot E}{\frac{L^2}{\rho^2}} = \frac{\pi^2 \cdot E\rho^2}{L^2} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{SL^2}$$

soit : $n_\lambda \cdot S = \frac{\pi^2 E I_{\alpha\beta}}{L^2}$ $\quad n_\lambda \cdot S = P_c$.

$\boxed{P_c = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\alpha\beta}}{L^2}}$ *(1)* et $\boxed{P \leqslant \frac{P_c}{\alpha}}$

avec $\alpha \simeq \frac{2R_e}{R}$ (formule de RESAL).

P_c charge critique (déformation permanente et flambement dangereux si $P > P_c$.

P charge pratique admissible, R_e voir M. 57, R (résistance pratique à la compression) voir M. 58.

Remarque : Formule d'Euler applicable si $\frac{L}{\rho} \geqslant k$.

	Aciers	Fonte	Bois	Béton	
α	4 à 5	8	10	8 à 10	valeurs moyennes.
k	100	60	70	140	

Différents cas. (coefficients d'arcboutement).

Dans la formule *(1)* prendre : $L = L_0$ (fig. 2) $L \simeq 2/3\ L_0$ (fig. 4) ; $L = 2L_0$ (fig. 3) $L = 1/2\ L_0$ (fig. 5)

Formule de RANKINE (applicable si $\frac{L}{\rho} < k$).

$\boxed{P \leqslant \frac{R \cdot S}{1+\beta\left(\frac{L}{\rho}\right)^2}}$ ou $\boxed{\frac{P}{S} \cdot \left[1 + \beta \frac{L^2 S}{I_{\alpha\beta}}\right] \leqslant R}$ $\beta = \frac{1}{k^2}$

R = résistance limite pratique à la compression.

Si $\frac{L}{\rho} < 20$ le terme $\beta\left(\frac{L}{\rho}\right)^2$ est négligeable devant 1, il est possible d'appliquer la loi de compression simple (voir M. 58).

Formule de STRAND (employée en aviation).

$\boxed{n_\lambda = n_0 e^{\frac{-\lambda^2}{m^2}}}$ avec $m^2 = \frac{\pi^2 e E}{n_0}$

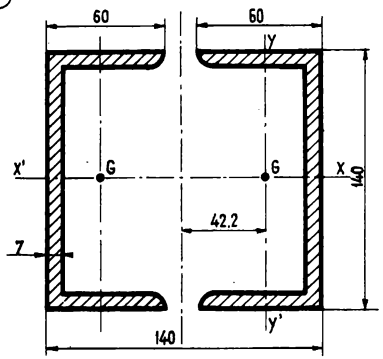
e = base des logarithmes népériens = 2,71828.

n_0 = contrainte de flambement local (compression).

M. 75 — FLAMBEMENT (2)

APPLICATIONS

①



CAS PARTICULIER

La direction de la charge n'est pas rigoureusement dans l'axe de la poutre.

Il y a un moment de flexion. Soient :
x la distance de l'axe à la direction de la charge.
f la flèche.

$$\frac{x}{f} = \frac{L}{f} \times \frac{x}{L}.$$

On s'impose une valeur limite de $\frac{L}{f}$ (en général $L/f \simeq 300$).

La charge de sécurité ou charge pratique est encore égale à $P = \frac{P}{\alpha}$ mais avec :

$$\alpha = 1 + 1{,}25\frac{x}{f}$$

soit : $$\boxed{\alpha = 1 + 375\frac{x}{L}}$$

1er problème (fig. 1). Un poteau est constitué par deux profilés ⊏ en acier laminé ($E = 20\,000$ *kgf/mm²*) de 140 × 60 × 7 assemblés rigidement. On considère les extrémités en « semi-articulation » soit $L_o = 0{,}8$ L. La hauteur du poteau est 4 *m*.

Calculer la charge pratique admissible en supposant que chaque profilé supporte la moitié de la charge (prendre $\alpha = 5$).

Solution.

Adoptons la formule :

$$\frac{L}{\rho} = \frac{L}{\sqrt{\frac{I}{S}}}.$$

Les tables numériques donnent pour un profilé
$I = 627 \times 10^3$ *mm⁴* et $S = 2\,040$ *mm²*.

$$\sqrt{\frac{I}{S}} = \sqrt{\frac{627\,000}{2\,040}} \simeq 17{,}5,$$

$$\frac{L}{\rho} = \frac{3\,200}{17{,}5} \simeq 182.$$

($L/\rho > 100$ donc formule d'EULER applicable.)

$$P = \frac{1}{5}\frac{\pi^2 EI}{(0{,}8L)^2}$$

$$= \frac{1}{5}\frac{(3{,}14)^2 \times 20\,000 \times 627\,000}{0{,}64 \times 16 \times 10^6} \simeq 2\,440 \text{ kgf}.$$

Soit pour le poteau $2\,440 \times 2 = 4\,880$ *kgf*.

2e problème. Une cornière de 50 × 50 × 5 en acier ($E = 20\,000$) supporte une charge P exercée par les goussets de liaison. On admet une excentricité $x = 2$ *cm* par rapport à l'axe de la poutre.

Calculer la charge de sécurité.

Comparer ce résultat avec ceux donnés par les formules d'EULER et de RANKINE (longueur de la cornière $L_o = 1$ *m* ; prendre $L = L_o$).

Solution.

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \begin{cases} L = 10^3 \text{ mm}. \\ E = 20\,000 \text{ kgf/mm}^2. \\ I = 46\,000 \text{ mm}^4 \text{ (tables numér.)}. \\ \pi^2 \simeq 10. \end{cases}$$

$$P_e = \frac{10 \times 20\,000 \times 46\,600}{1\,000\,000} \simeq 9\,320 \text{ kgf}.$$

$$\alpha = 1 + 375 \times \frac{20}{1\,000} = 8{,}5.$$

$$P = \frac{9\,320}{8{,}5} \simeq \mathbf{1\,100} \text{ kgf}.$$

Formule d'EULER : $P = \frac{1}{5}\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \mathbf{1\,860}$ *kgf*.

Formule de RANKINE :

$$P = \frac{RS}{1 + \beta\left(\frac{L}{\rho}\right)^2} = \frac{478 \times 8}{1 + \frac{1}{10^4} \times \frac{10^6}{94}} \simeq \mathbf{1\,860} \text{ kgf}.$$

en prenant : R (compression) = 8 *kgf/mm²*,
$\rho = 9{,}7$ *mm* (calculé).

3e problème. Une colonne pleine en fonte (R compression = 6 *kgf/mm²*) a une hauteur 3 *m* et $\phi = 120$ *mm* ; extrémités non encastrées.

Calculer la charge de sécurité avec $E = 10\,000$ et $\alpha = 8$.

Solution.

Choix de la formule :

$$I = \frac{\pi d^4}{64} ; \quad S = \frac{\pi d^2}{4} ; \quad \frac{I}{S} = \frac{d^2}{16} ;$$

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{S}} = \frac{d}{4} = 30 \text{ mm}.$$

$$\frac{L}{\rho} = \frac{3\,000}{30} = 100; \quad \frac{L}{\rho} > 80 \text{ (fonte)}.$$

La formule d'EULER est applicable.

$$I = \frac{3{,}14 \times 120^4}{64} \simeq 10^7 \text{ mm}^4.$$

$$S = \frac{3{,}14 \times 120^2}{4} = 11\,300 \text{ mm}^2.$$

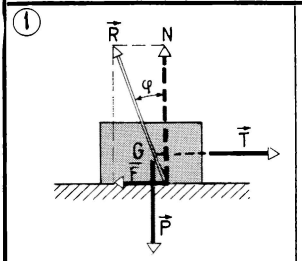
$$P = \frac{1}{8}\frac{\pi^2 \times 10^4 \times 10^7}{9 \times 10^6} \simeq \mathbf{14\,000} \text{ kgf}.$$

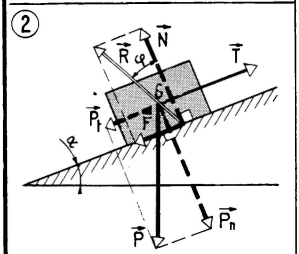
V

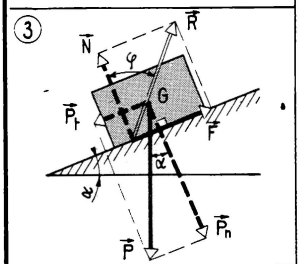
RÉSISTANCES PASSIVES

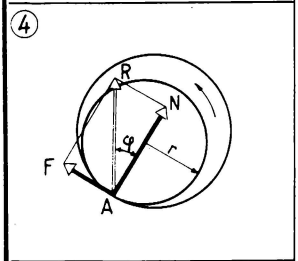
FROTTEMENT DE GLISSEMENT
RÉSISTANCE AU ROULEMENT
RAIDEUR DES CORDES
CHOC
RÉSISTANCES DIVERSES

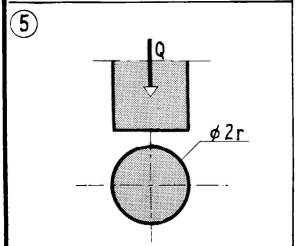
FROTTEMENT DE GLISSEMENT (I) — M. 76











LOIS DE COULOMB ET MORIN

Le frottement de glissement est :
- indépendant de l'étendue des surfaces en contact, mais dépend de leur nature et de leur état ;
- proportionnel à la pression normale ;
- indépendant de la vitesse du corps frottant (frottement dynamique) lorsque cette vitesse n'est pas trop grande et reste inférieure à 5 *m/s*. Le frottement dynamique est légèrement inférieur au frottement de départ (frottement statique).

Force de frottement $\vec{F}$ (ou comp. tangent. de R)

f. coefficient de frottement à déterminer par l'expérience ;
N. force normale (fig. 1).
F = fN dirigée en sens contraire du mouvement.

Réaction totale $(\vec{R})$.

R fait un angle φ avec la réaction normale ou composante normale $\vec{N}$ ou $\vec{R_N}$ (fig. 1, 2, 3).

$$R^2 = F^2 + N^2 = F^2 + \frac{F^2}{f^2} = F^2\left(1 + \frac{1}{f^2}\right) = F^2 \times \frac{1 + f^2}{f^2}$$

$$\boxed{R = F \times \frac{\sqrt{1 + f^2}}{f}}$$

On a aussi $R_N = R \cos \varphi = N$
$F = R \sin \varphi$

$$\boxed{f = \operatorname{tg} \varphi}$$

φ = angle de frottement.

Frottement des tourillons (fig. 4).

Moment de frottement	Puissance absorbée
$\mathcal{M} = rF = rfN$	$\mathcal{P} = \mathcal{M}\omega = rfN\frac{\pi n}{30}\ kgm/s$
$\mathcal{M} = \mathbf{rfN}$ en kgm	$\mathcal{P} = \frac{\pi}{2\,250}\ \mathbf{rfNn}$ en ch

Exemple : N = 400 *kgf* ; d = 30 *mm* ; n = 450 *tr/mn* ; f = 0,05.

$$\mathcal{P}ch = \frac{\pi}{2\,250} \times 0{,}015 \times 0{,}05 \times 400 \times 450 \simeq \mathbf{0{,}19}\ ch.$$

Frottement des pivots (fig. 5).

Moment de frottement	Puissance absorbée
$\mathcal{M} = \frac{2}{3}rF = \frac{2}{3}rfQ$	$\mathcal{P} = \frac{2}{3}rfQ \cdot \frac{\pi n}{30}\ kgm/s$
$\mathcal{M} = \frac{2}{3}\mathbf{rfQ}$ en kgm	$\mathcal{P} = \frac{\pi}{3\,375} \cdot \mathbf{rfQn}$ en ch

Exemple : Q = 500 *kgp* ; d = 45 *mm* ; f = 0,05 ; n = 300 *tr/mn*.

$$\mathcal{P}ch = \frac{\pi}{3\,375} \times 0{,}0225 \times 0{,}05 \times 500 \times 300 \simeq \mathbf{0{,}157}\ ch.$$

Facteur d'usure (pV) dans un tourillon de longueur (L).

$$\mathcal{P} = \frac{\pi n}{30} rfN = 2rf \times \frac{N}{2rL} \times \frac{2\pi rLn}{60} = \frac{N}{2rL} \times \frac{2\pi rn}{60} \times 2rfL$$

$$\frac{N}{2rL} = \text{pression unitaire}\,(kgp/m^2) = \frac{N}{2rL}\,10^{-4}\,(kgp/cm^2) = p$$

$$6 < (\mathbf{p \cdot V}) < 30$$

$$\boxed{\mathcal{P} = 2p \cdot V \cdot f \cdot r \cdot L}$$

(kgm/s) (kgp/cm²) (m/s) (cm) (cm)

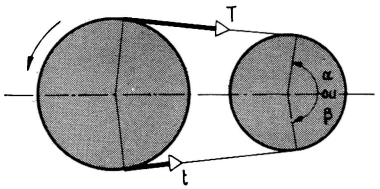
Quelques valeurs de f (ordre de grandeur) :

Métaux sur métaux : sans enduit 0,18 ; lubrifiés 0,05 à 0,08 ; cuir sur fonte 0,16 ; cuir sur acier 0,28 ; ferodo sur fonte 0,2 à 0,4.

M. 77 FROTTEMENT DE GLISSEMENT (2)

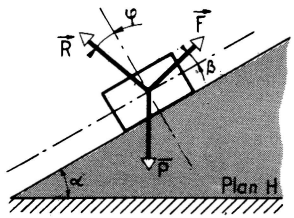
APPLICATIONS

①



α en rd , β en °

②



Frottement des courroies sur les poulies (fig. 1).

T = tension dans le brin menant (brin dur).
t = tension dans le brin mené (brin mou).
F = force tangentielle sur la poulie menante.
f = coef. de frottement courroie sur jante.
α = arc chaussé sur la plus petite poulie.
e = base des log. népériens = 2,718...
T_0 = tension des brins au repos.
$T - t = F$; $T + t = 2\,T_0$ (constant) ;

$$\boxed{F = \frac{1\,432\,\mathcal{P}}{Dn}}$$

F en *kgf*
$\mathcal{P}$ en *ch*
D en *m*
n en *tr/mn*

$$\boxed{T = F\,\frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1}} \qquad \boxed{t = F \times \frac{1}{e^{f\alpha} - 1}}$$

Pour les grandes vitesses linéaires des courroies ($v > 10$ *m/s*), tenir compte de la tension t_1 due à la force centrifuge ;

$$\boxed{t_1 = 0{,}01\ V^2}$$

v en *m/s*
t_1 en *kgf/cm²*

Exemple de calcul d'une courroie.

Un moteur de 18 *ch* tournant à 1 000 *tr/mn* porte une poulie de ϕ 320 *mm* qui doit commander une transmission à 250 *tr/mn*. Distance des axes Δ = 3,5 *m*.

Calculer la poulie commandée et la courroie cuir pour laquelle R = 40 *kgf/cm²* (f = 0,155).

Solution.

1. **Diamètre de la poulie réceptrice :**

$$D' = 0{,}985\,\frac{n}{n'} ; \quad D = 0{,}985 \times \frac{1\,000}{250} \times 320 = 1\,255\ mm$$

en tenant compte d'un glissement de 15°/₀₀.
On prendra la dimension de la poulie de série la plus voisine soit D' = **1 250** *mm*.

2. **Vitesse tangentielle :**

$$v = \frac{\pi Dn}{60} = \frac{0{,}32 \times 1\,000}{19{,}2} = 16.55\ m/s.$$

3. **Effort tangentiel :**

$$F = 1\,432\,\frac{\mathcal{P}}{Dn} = 1\,432 \times \frac{18}{0{,}32 \times 1\,000} = 81\ kgf.$$

4. **Tension de la courroie :**
β = mesure en degrés de l'arc de contact sur la petite poulie :

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{D' - D}{2\Delta} = \frac{1\,250 - 320}{7\,000} = 0{,}133.$$

$$\beta \simeq 165° ; \quad \alpha = \frac{\pi\beta}{180} = 2{,}88\ rd.$$

$$T = F\,\frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} = 81 \times \frac{e^{0{,}155 \times 2{,}88}}{e^{0{,}155 \times 2{,}88} - 1}$$

$$= 81 \times 2{,}80 = 226\ kgf.$$

5. **Force centrifuge :**

$$t_1 = 0{,}01 \times 16{,}55^2 = 2{,}6\ kgf/cm^2.$$

$$n = R_e - t_1 = 40 - 2{,}6 = 37{,}4\ kgf/cm^2.$$

6. **Section de la courroie :**

$$S = \frac{T}{R_e - t_1} = \frac{226}{37{,}4} = 6{,}05\ cm^2 = 605\ mm^2.$$

Une courroie simple d'épaisseur **5** *mm* convient.

Largeur $L = \frac{605}{5} \simeq$ **120** *mm*.

Largeur de la poulie :

$$120 \times \frac{11}{10} = \mathbf{132}\ mm, \text{ soit } 130\ mm.$$

Équilibre du plan incliné avec frottement (fig. 2).

φ = angle de frottement.
α = angle du plan incliné avec le plan H
β = angle de $\vec{F}$ avec le plan incliné.

$$\boxed{F = P \times \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}}$$

$$F > P\,\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}$$ le corps monte,

$$F < P\,\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}$$ le corps descend.

Limites d'équilibre :

$$P\,\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)} \leqslant F \leqslant P\,\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}.$$

Cas particuliers :

$\beta = -\alpha$ (F horizontale) ; $F = P \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$.
$\beta = \varphi$ (F minimum) ; $F = P \sin(\alpha + \varphi)$.
$\beta = -\frac{\pi}{2} + \varphi$ (F maximum) ; $F = \infty$.

Impossibilité de mouvement, il y a **arc-boutement.**

$\alpha = \varphi$; F = 0 : le mouvement de descente est sur le point de se produire.

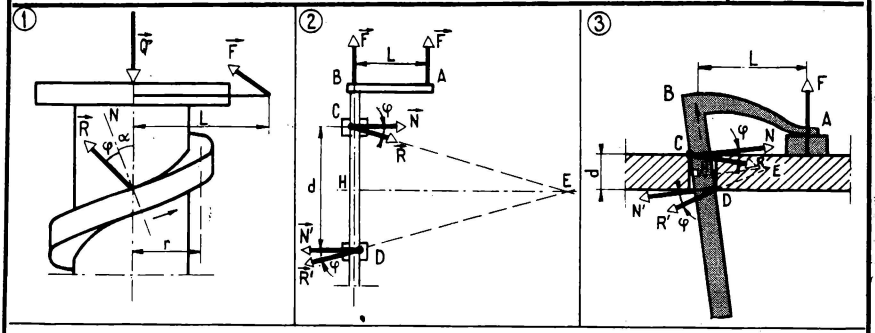
Rendement du plan incliné :

$$\boxed{\eta = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} \times \frac{\cos(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}}$$

FROTTEMENT DE GLISSEMENT (3)

APPLICATIONS

M. 78



Vis à filets carrés (fig. 1).

Condition d'équilibre à la montée :

$$\boxed{\mathcal{M} = FL = Qr\ tg\ (\alpha + \varphi)}$$

$$tg\ (\alpha+\varphi) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \varphi}{1 - tg\alpha\, tg\varphi}\ ;\ tg\ \alpha = \frac{p}{2\pi r}\ ;\ p = \text{pas}$$

$$tg\ (\alpha+\varphi) = \frac{\dfrac{p}{2\pi r} + f}{1 - \dfrac{pf}{2\pi r}} \qquad tg\ \varphi = f$$

$$\boxed{\mathcal{M} = FL = Qr\frac{p + 2\pi rf}{2\pi r - pf}}$$

Exemple :

$Q = 1\,000\ kgf$; $p = 5\ mm$; $r = 15\ mm$; $f = 0{,}1$; $L = 0{,}30\ m$.

$$0{,}3\ F = 1\,000 \times 0{,}015 \times \frac{0{,}005 + 2 \times 3{,}14 \times 0{,}015 \times 0{,}1}{2 \times 3{,}14 \times 0{,}015 - 0{,}005 \times 0{,}1}$$

$$0{,}3\ F \simeq 2{,}31\ mkgf\ ;\ F = \frac{2{,}31}{0{,}3} = 7{,}7\ kgf$$

Condition d'équilibre à la descente :

$$\boxed{\mathcal{M} = FL = Qr\ tg\ (\alpha - \varphi)}$$

Limites d'équilibre :

$Qr\ tg\ (\alpha - \varphi) < \mathcal{M} < Qr\ tg\ (\alpha + \varphi)$

Si $\alpha > \varphi$, $\mathcal{M} > 0$ l'écrou tourne sous l'effet de $\overrightarrow{Q}$, mécanisme réversible.

Si $\alpha < \varphi$, $\mathcal{M} < 0$ pour la descente, mécanisme irréversible.

Rendement du système vis-écrou :

$$\boxed{\eta = \frac{tg\ \alpha}{tg\ (\alpha + \varphi)}}$$

Vis industrielles : $f = 0{,}1$ d'où $\varphi = 5°40'$.

$$\alpha = 2° \qquad \eta = \frac{tg\ 2°}{tg\ 7°40'} = 0{,}26$$

$$\alpha = 3° \qquad \eta = \frac{tg\ 3°}{tg\ 8°40'} = 0{,}34$$

$$\text{si } \alpha = \varphi \qquad \eta = \frac{tg\ \alpha}{tg\ 2\alpha} = \frac{tg\ \alpha}{\dfrac{2\,tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}}$$

$$= \frac{1 - tg^2\ \alpha}{2} < \frac{1}{2}$$

Le rendement d'une vis irréversible est de l'ordre de 0,3.

Cas où la vis frotte sur une butée :

r' = rayon moyen de la butée

$\mathcal{M} = FL = Q\ [r\ tg\ (\alpha + \varphi) + r'\ tg\ \varphi]$

Guidage de tiges excentrées.

L'effort $\overrightarrow{F}$ est appliqué en A (fig. 2) à l'extrémité de la manivelle AB de longueur L. $\overrightarrow{F}$ en A est équivalent à $\overrightarrow{F}$ en B et au couple de moment LF.

$\overrightarrow{N} \uparrow\uparrow - \overrightarrow{N'}$ sont les actions de contact normales des guides C et D distants de **d**,

$$LF = dN \quad \text{ou} \quad N = F\frac{L}{d}$$

Mouvement si $F > 2fN$ ou $F > 2fF\dfrac{L}{d}$

ou $f < \dfrac{d}{2L}$

En C et D, les réactions totales sont $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{R'}$ avec $R = -R'$ faisant un angle φ avec les normales.

E = rencontre des lignes d'action de R et R'.

$$f = tg\ \varphi = \frac{CH}{HE} = \frac{d}{2HE}\ ;\ \text{il faut donc}$$

$$HE > L.$$

Si $HE < L$ mouvement impossible, le dispositif est dit à coincement ; utilisé dans des dispositifs de serrage, il est réalisé lorsque **d** est petit par rapport à **l**.

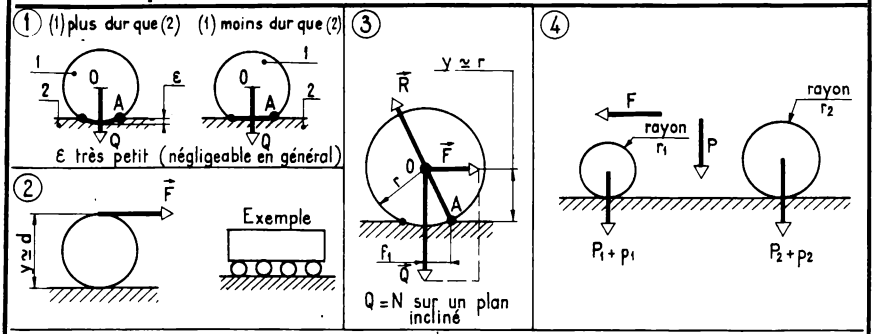
Exemple. Valet de menuisier (fig. 3).

Pour qu'il y ait mouvement et bon guidage, il faut $\dfrac{d}{L}$ le plus grand possible avec f le plus petit possible.

On utilise des surfaces polies et lubrifiées.

Exemple. Coulisseau se déplaçant dans des glissières (système bielle-manivelle, cas de certaines poinçonneuses).

M. 79 RÉSISTANCE AU ROULEMENT



MOMENT DE FROTTEMENT (fig. 1, 2, 3)

$$\mathcal{M}_f = f_1 Q$$

f_1 n'est pas un coefficient, mais une longueur exprimée en mètres.

Condition de roulement et non-glissement.

$$yF \geqslant f_1 Q$$

ou $F \geqslant \frac{f_1 Q}{y}$ ou $\boxed{\frac{f_1}{y} \leqslant \frac{F}{Q}}$

Soit f le coefficient de frottement de glissement, il y aura glissement si :

$$F \geqslant fQ \quad \text{ou} \quad f \leqslant \frac{F}{Q},$$

il y aura roulement si $f > \frac{F}{Q}$

donc si $\boxed{\frac{f_1}{y} < f}$

Dans le cas contraire, il y aura glissement avant roulement (cas des tourillons lors de la mise en mouvement).

Travail absorbé par la résistance au roulement.

$$\boxed{\mathcal{T} = f_1 Q \times \frac{L}{r}} \quad \text{(fig. 3)}$$

L = chemin parcouru par le centre du rouleau.
r = rayon du rouleau ou de la roue.

Pour le même déplacement le travail absorbé par le frottement de glissement serait

$$\mathcal{T}_1 = fQL, \quad \text{mais} \quad \frac{f_1}{r} < f$$

donc $\frac{f_1}{r} QL < fQL$ ou $\mathcal{T} < \mathcal{T}_1$.

TIRAGE DES VÉHICULES (fig. 4)

P = poids du véhicule.
P_1 = composante du poids sur l'essieu AV.
P_2 = composante du poids sur l'essieu AR.
p_1 = poids de l'essieu AV.
p_2 = poids de l'essieu AR.
r_1 = rayon des roues AV.
r_2 = rayon des roues AR.
f = coefficient de résistance au glissement des fusées.
r = rayon des fusées.
f_1 = coefficient de résistance au roulement des roues.
F = effort de tirage.

Travail moteur pour un tour des roues AV :

$$F \times 2\pi r_1 = f_1(P_1 + p_1)2\pi + f_1(P_2 + p_2) \times 2\pi \frac{r_1}{r_2}$$

(travail absorbé par le roulement)

$$+ fP_1 \times 2\pi r + fP_2 \times 2\pi \frac{r_1}{r_2} \cdot r$$

(travail absorbé par le glissement)

$$\boxed{F = f_1\left(\frac{P_1 + p_1}{r_1} + \frac{P_2 + p_2}{r_2}\right) + fr\left(\frac{P_1}{r_1} + \frac{P_2}{r_2}\right)}$$

En négligeant p_1 et p_2 devant P, et en admettant que

$$\frac{P_1}{r_1} = \frac{P_2}{r_2} = \frac{P}{r_1 + r_2}$$

on obtient :

$$F = \frac{r_1 + r_2}{2P}(f_1 + fr).$$

Enfin si $r_1 = r_2 = r_0$, on a

$$\boxed{F = \frac{P}{r_0}(f_1 + fr)}$$

Coefficient de tirage :

$$\boxed{c = \frac{F}{P}} = \frac{1}{r_0}(f_1 + fr).$$

Quelques valeurs de c :
0,003 à 0,005 pour chemins de fer.
0,008 à 0,012 pour tramways.
0,010 à 0,025 pour voitures jantes métalliques.
0,017 à 0,027 pour automobiles.

Force d'adhérence (F_a).

P_a = poids adhérent ou charge sur essieux moteurs.
f_a = coefficient d'adhérence (0,14 pour voies ferrées).

$$\boxed{F_a = f_a \times P_a}$$

L'effort de traction a pour limite F_a.

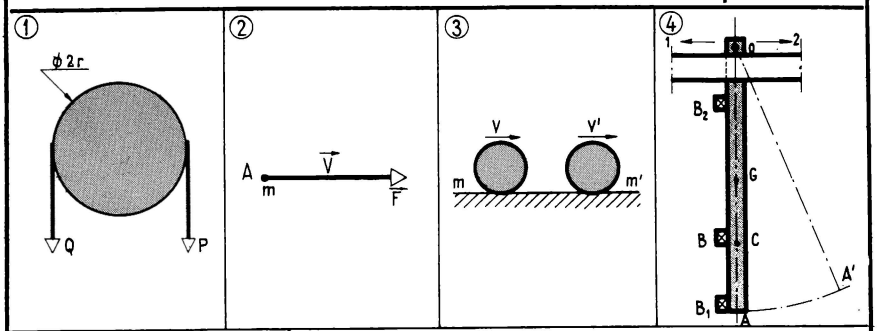
Moment d'adhérence ($\mathcal{M}_a$).

Couple moteur rF ; f = coefficient de frottement de glissement; $\mathcal{M}_a = 1{,}3\ rF_{max}$.

1,3 = coefficient de sécurité (f = 0,3 pour garnitures Ferodo à sec).

RAIDEUR DES CORDES — CHOC

M. 80



RAIDEUR DES CORDES

C'est la résistance qui s'oppose à l'enroulement d'un câble sur un cylindre.

Théoriquement P = Q (fig. 1).

Pratiquement pour cordes neuves, on a :

$$P = Q \times \left(1 + \frac{d}{2r}\right).$$

d = diamètre de la corde ;
r = rayon du cylindre.

Pour cordes usagées :

$$Q\left(1 + \frac{d}{5r}\right) < P < Q\left(1 + \frac{d}{3r}\right).$$

En tenant compte :
— du frottement de la corde sur la gorge de la poulie ;
— du frottement du tourillon dans le palier ;
— de la raideur de la corde.

On a en moyenne :

$P = 1{,}2\ Q$ pour poulies fixes ;
$P = 1{,}3\ Q$ pour poulies mobiles ;
$1{,}4\ Q < P < 1{,}5\ Q$ pour moufles.

CHOC

Corps A de masse **m**, sous l'action d'une force $\vec{F}$ a acquis la vitesse $\vec{V}$ au temps t (fig. 2).

$$F = m\gamma = \frac{mv}{t} \quad \text{ou} \quad mv = Ft.$$

mv est la quantité de mouvement.
Ft est l'impulsion (voir M. 53).

Choc de deux sphères (fig. 3).

Masses **m** et **m'** ; vitesses v et v' avant choc avec $v > v'$.

1er cas. Les corps sont parfaitement mous.

Après choc, vitesse commune :

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

2e cas. Les corps sont parfaitement élastiques (aucune perte d'énergie).

Après choc, les vitesses sont v_1 et v'_1.

$$\begin{cases} v - v' = v'_1 - v_1 ; \\ v_1 = \dfrac{2m'v' + (m - m')v}{m + m'} ; \\ v'_1 = \dfrac{2mv + (m' - m)v}{m + m'}. \end{cases}$$

Cas particuliers :

1. Corps mous :

Si $m = m'$ $\quad u = \dfrac{v + v'}{2}$;

Si $v = -v'$ $\quad u = 0$.

2. Corps élastiques :

Si $m = m'$ les égalités précédentes donnent $v_1 = v'$ et $v'_1 = v$, il y a échange des vitesses.

Si **m'** très grand par rapport à **m**

$v_1 \to 2v' - v$ et $v'_1 \to v'$.

Si dans ce cas $v' = 0$, on a $v_1 = -v$.

La masse **m** revient en sens contraire avec la même vitesse absolue.

Travail perdu dans le choc des corps mous.

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \frac{mm'(v - v')^2}{m + m'}$$

ou $\mathfrak{T} = \dfrac{1}{2} m(v - u)^2 + \dfrac{1}{2} m'(u - v')^2$.

$v - u$ = vitesse perdue par **m**.
$u - v'$ = vitesse gagnée par **m'**.

Centre de percussion (fig. 4.).

OA = barre prismatique mobile autour de l'axe O appuyé sur deux supports de façon que cet axe puisse glisser transversalement. La barre inclinée en OA' retombe sur le butoir B_1, au moment du choc O se déplace dans le sens (1).

Si le butoir est en B_2, vers le haut de OA, au moment du choc O se déplace dans le sens (2). Entre B_1 (bas) et B_2 (haut), il existe une position B pour laquelle O reste immobile.

Le point C de la barre, en regard de B, est le centre de percussion de la barre relatif à l'axe O. Le choc ayant lieu en ce point l'axe ne supporte aucune poussée.

Application : Machines où existent des pièces articulées soumises à des chocs. — Marteau.

M. 81 RÉSISTANCES DIVERSES

RÉSISTANCE AU DÉMARRAGE

Due à l'inertie.

$F = m\gamma$ croît avec γ.

Importante dans le cas d'arrêts fréquents avec maintien d'une vitesse moyenne assez élevée (trolleybus, métro).

RÉSISTANCE DUE AUX COURBES

Négligeable pour voitures ordinaires ou automobiles où les roues sont folles, ou reliées par un système différentiel. Néanmoins frottement latéral sur les collets des fusées par suite de force centrifuge. Importante pour wagons de voies ferrées. Résistance d'autant plus grande que le rayon de la courbe est plus petit et les roues plus écartées. Elle provient :

1. du frottement latéral des boudins sur le bord du rail (résistance importante).
2. du glissement circonférenciel des jantes qui, avec la même vitesse angulaire, doivent parcourir des chemins différents ; cette résistance est atténuée par l'inclinaison des profils des bandages.

RÉSISTANCE DE L'AIR

Très difficile à évaluer. Dépend de la vitesse et de la direction du vent, de la vitesse et de la forme du corps en déplacement. Elle est de la forme :

$$R = kSV^2 \qquad (1)$$

si $\frac{V^2}{340^2}$ est très faible par rapport à 1 (340 *m/s* = vitesse du son dans l'air à 15° C) (voir M. 121 à M. 126).

Exemples :

Si V = 30 *m/s*, soit 108 *km/h*

$$\frac{V^2}{340^2} = \frac{30^2}{340^2} \simeq 0{,}08 \text{ (négligeable).}$$

Si V = 100 *m/s*, soit 360 *kmh*

$$\frac{V^2}{340^2} \simeq \frac{1}{11} \text{ (non négligeable).}$$

La formule (*1*) n'est plus applicable à partir de 300 *km/h*.

S représente le maître-couple, c'est-à-dire la plus grande section transversale droite du véhicule, y compris les roues.

k est un coefficient aérodynamique qui dépend de la forme, de l'étendue, de l'orientation de la surface par rapport à la direction du mouvement ($0{,}04 < k < 0{,}08$ pour véhicules ordinaires).

Application.

La « 203 » Peugeot a une hauteur à vide de 1,56 *m*, largeur hors tout 1,61 *m*, coefficient aérodynamique 0,048. Quelle est la puissance absorbée par la résistance de l'air lorsque la voiture roule à 108 *km/h* ?

Solution :

$$V = \frac{108\,000}{3\,600} = 30 \text{ } m/s.$$

$$R = kSV^2 = 0{,}048 \times 1{,}61 \times 1{,}56 \times 30^2 \simeq 108 \text{ } kgf.$$

$$\mathcal{P} = \frac{108 \times 30}{75} \simeq \mathbf{43{,}2} \text{ } ch.$$

Forme générale de la puissance absorbée :

$$\mathcal{P} = \frac{kSV^3 \times V}{75} = \frac{kSV^3}{75} \text{ } (ch).$$

Elle dépend du cube de la vitesse.

Pourcentage de puissance absorbée par les résistances pour une voiture automobile roulant à 120 *km/h* (ordre de grandeur).

Pertes dans les transmissions	17 %
Pertes par roulement	27 %
Frottement des roues AV et ventilation..	4 %
Résistance de l'air	52 %

INFLUENCE DES RAMPES EN TRACTION

Poids adhérent d'un tracteur = charge sur les essieux moteurs soit P_a.

Force adhérente = $f_a P_a$.

$f_a \simeq 0{,}14$ pour voies ferrées et 0,65 pour pneumatiques (en moyenne).

Effort de traction maximum = $f_a P_a$ — résistance propre du tracteur.

Dans les rampes, la force nécessaire au tirage augmente, la force adhérente diminue, il y a donc une rampe maximum qu'un tracteur ne peut franchir.

Application.

Soit une locomotive de 100 *tp*, quatre essieux moteurs, charge maximum 17 *tp* par essieu. Quel est l'effort de traction maximum au crochet d'attelage dans une rampe de 15°/₀₀.

Coefficient de tirage : C = 0,005.

Solution.

Effort adhérent ou effort de tirage maxi F :

$F = f_a P_a = 0{,}14 \times 17\,000 \times 4 = 9\,520 \text{ } kgf.$

Poids total (wagons + locomotive) tiré en palier :

$$Q = \frac{F}{c} = \frac{9\,520}{0{,}005} = 1\,904\,000 \text{ } kgp \simeq 1{,}900 \text{ } tp.$$

Poids net (wagons) remorqué en palier :

$$Q' = 1\,900 - 100 = 1\,800 \text{ } tp.$$

Dans une rampe de 15 °/₀₀ :

$F_1 \simeq F$ car $\cos \alpha \simeq 1$.

$F_1 \simeq F \simeq (Q_1 \times 0{,}005) + (Q_1 \times 0{,}015)$

$= (0{,}005 + 0{,}015)\, Q_1.$

Q_1 = poids total à tirer;

$$Q_1 = \frac{9{,}52}{0{,}02} = \mathbf{476} \text{ } tp \qquad Q'_1 \simeq \mathbf{376} \text{ } tp.$$

VI

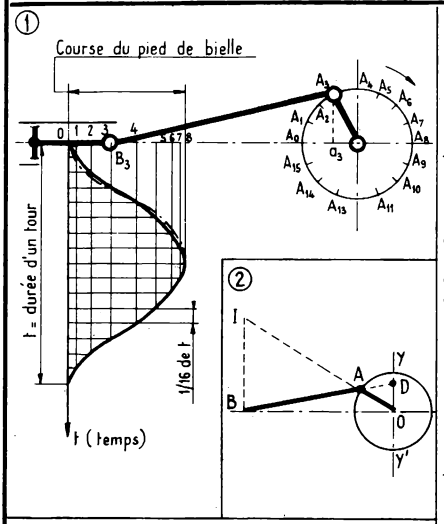
CINÉMATIQUE APPLIQUÉE

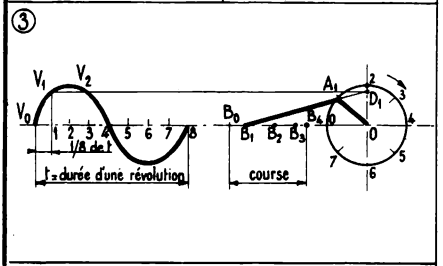
MÉCANISMES USUELS

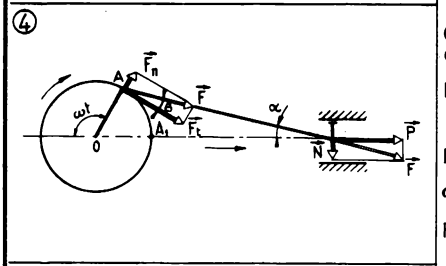
SYSTÈME BIELLE-MANIVELLE
JOINTS
MÉCANISMES A RETOUR RAPIDE
EXCENTRIQUES
CAMES
ROUES DE FRICTION
ENGRENAGES
VIS-ÉCROU ET VIS SANS FIN

SYSTÈME BIELLE-MANIVELLE

M. 82







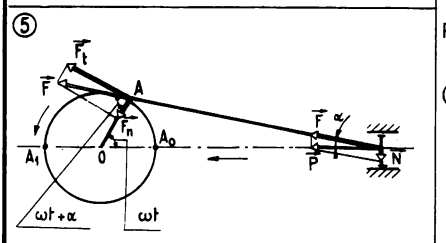


DIAGRAMME DES ESPACES (fig. 1).

La manivelle est animée d'un mouvement de rotation uniforme **n** *tr/mn.*

Durée d'un tour $\frac{60}{n}$ *s.*

On détermine graphiquement les positions $B_0\ B_1 \ldots B_{16}$ de la tête de bielle correspondant aux positions $A_0\ A_1 \ldots A_{16}$ du maneton. L'axe des temps, perpendiculaire à $B_0\ B_{16}$, porte 16 divisions arbitraires égales.

La courbe obtenue est le diagramme des espaces. Mouvement accéléré de B_0 à B_4 est décéléré de B_4 à B_8. N'est pas uniformément varié (la courbe en trait mixte indique un mouvement uniformément varié). N'est pas non plus sinusoïdal ; c'est le point a_3 projection de A_3 qui aurait un mouvement sinusoïdal, mais a_3B_3 n'est pas une longueur constante.

Si la bielle est longue, par rapport à la manivelle, le mouvement est approximativement sinusoïdal.

DIAGRAMME DES VITESSES

V_A et V_B = vitesses des points A et B.

Le centre instantané de rotation du mouvement de la bielle est en I (fig. 2), intersection du rayon OA et de la perpendiculaire en B à OB (normale à la courbe lieu de B). On a :

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{IA}{IB} \quad \text{et} \quad \frac{IA}{IB} = \frac{OA}{OD} = \frac{R}{OD}$$

$$V_A = \omega R \quad \text{donc} \quad \frac{\omega R}{V_B} = \frac{R}{OD}$$

$$V_B = \omega \cdot OD$$

La vitesse de B est proportionnelle à OD. Construction par points du diagramme des vitesses (fig. 3).

EFFORTS SUR LE PIED DE BIELLE

Le couple moteur est constant (fig. 4).

$$F_t = \frac{1432\,\mathcal{P}}{Dn} = c^{te} \qquad F = \frac{F_t}{\cos\beta}, \quad F_n = F_t \operatorname{tg}\beta$$

$$\omega t = 90^\circ + \alpha + \beta \qquad \beta = (\omega t - \alpha) - 90^\circ$$

$$F = \frac{F_t}{\sin(\omega t - \alpha)} \quad \text{et} \quad F_n = -\frac{F_t}{\operatorname{tg}(\omega t - \alpha)}$$

$$P = \frac{F_t \cos\alpha}{\sin(\omega t - \alpha)} \quad \text{et} \quad N = \frac{F_t \sin\alpha}{\sin(\omega t - \alpha)}$$

Le piston moteur transmet une force P (fig. 5).

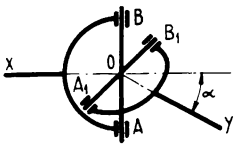
$$F = \frac{P}{\cos\alpha} \qquad N = P \operatorname{tg}\alpha$$

$$F_t = F \sin(\omega t + \alpha) = \frac{P \sin(\omega t + \alpha)}{\cos\alpha}$$

$$F_n = F \cos(\omega t + \alpha) = \frac{P \cos(\omega t + \alpha)}{\cos\alpha}$$

M. 83 JOINTS

①



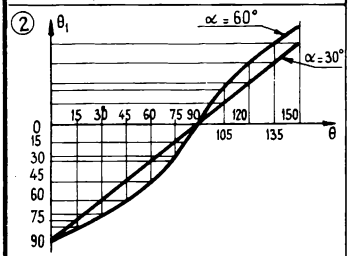
$\theta \longrightarrow$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$90° + \theta$	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$\operatorname{tg}(90° + \theta)$	$-\infty$	$-(2+\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-(2-\sqrt{3})$	0
$\operatorname{tg}\theta_1$	$-\infty$	$-\frac{2(2\sqrt{3}+3)}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2(2\sqrt{3}-3)}{3}$	0
$\theta_1 \longrightarrow$	−90°	−77°52′	−60°26′	−49°6′	−33°41′	−17°12′	0°

$\alpha = 30°$

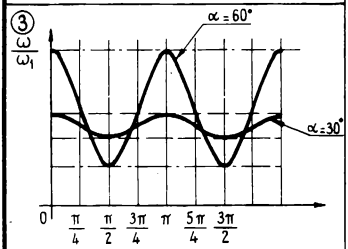
$\theta \longrightarrow$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$90° + \theta$	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$\operatorname{tg}(90° + \theta)$	$-\infty$	$-(2+\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-(2-\sqrt{3})$	0
$\operatorname{tg}\theta_1$	$-\infty$	$-2(2+\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-2(2-\sqrt{3})$	0
$\theta_1 \longrightarrow$	−90°	−82°22′	−73°54′	−63°26′	−49°6′	−28°11′	0°

$\alpha = 60°$

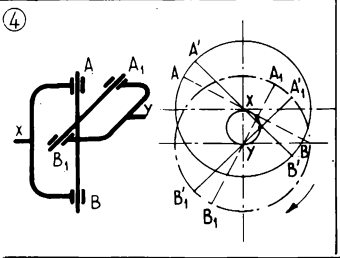
②



③



④



JOINT DE CARDAN OU UNIVERSEL (fig. 1).

Permet de réunir 2 arbres dont les axes se coupent sous un angle quelconque; la rotation de l'un des arbres sur lui-même commande la rotation de l'autre arbre sur lui-même.

α = angle aigu formé par les directions des 2 arbres.
θ = angle dont a tourné X dans le temps **t**.
θ_1 = angle dont a tourné Y dans le même temps.

On établit qu'entre ces angles existe la relation :

$$\operatorname{tg}\theta_1 = -\frac{1}{\cos\alpha}\operatorname{cotg}\theta$$

Si X a un mouvement de rotation uniforme $\theta = \omega t$, on a $\operatorname{tg}\theta_1 = -\frac{1}{\cos\alpha}\operatorname{cotg}\omega t$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\omega t\right).$$

Donc θ_1 n'est pas proportionnel à **t**, et le mouvement de rotation de Y n'est pas uniforme.

Variations de θ_1 en fonction de θ pour $\alpha = 30°$ et $\alpha = 60°$ (tableaux ci-contre et fig. 2).

$\alpha = 30°$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}(90° + \theta)$

$\alpha = 60°$ $\quad \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \operatorname{tg}\theta_1 = 2\operatorname{tg}(90° + \theta)$

Si $\alpha = 90°$, $\cos\alpha = 0$, l'angle θ_1 n'est pas défini, le croisillon n'est pas entraîné.

Relation entre les vitesses angulaires ω et ω_1.
On établit que :

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{1-\sin^2\theta\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\theta$$

Diagramme des variations de $\frac{\omega}{\omega_1}$ en fonction de θ (fig. 3).

DOUBLE JOINT DE HOOKE

On relie les 2 axes X et Y par un axe auxiliaire Z dont chaque extrémité est reliée à X et Y par un joint de cardan. Si l'angle (X, Z) est égal à l'angle (Z, Y) les vitesses de rotation ω et ω_1 sont les mêmes.

Il permet de relier 2 arbres faisant entre eux des angles trop grands, ou même des angles droits. Les inégalités de vitesses sont alors sensiblement réduites.

En automobile, on emploie un double cardan avec coulisses pour réunir le moteur (solidaire du châssis) et le différentiel (solidaire du châssis par l'intermédiaire de ressorts).

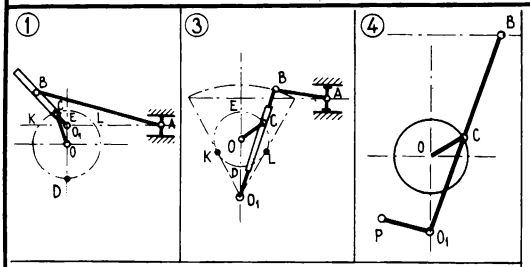
JOINT D'OLDHAM (fig. 4).

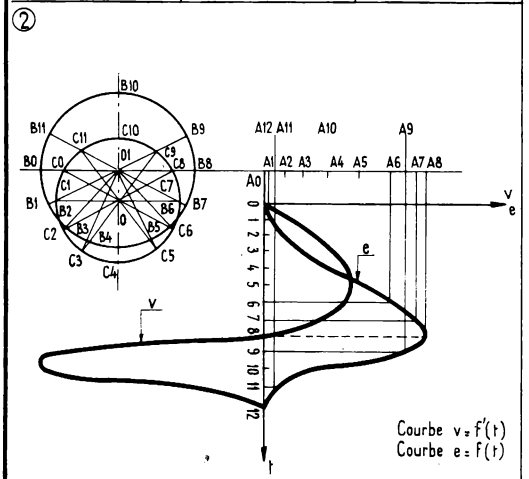
Sert à réunir deux axes parallèles dont la distance est faible.

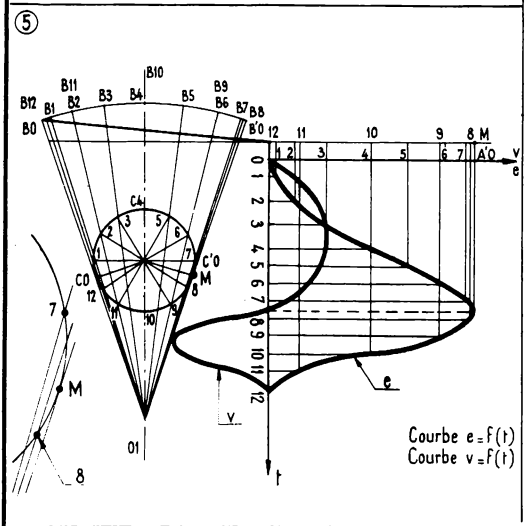
Les axes X et Y tournent à la même vitesse.

Utilisé dans le tour elliptique pour donner le mouvement convenable au plateau porte-pièce et à la pièce.

MÉCANISMES À RETOUR RAPIDE | M. 84







MANIVELLE A COULISSE

1. **A rotation continue** (fig. 1).

Le centre O_1 de la manivelle est intérieur au cercle décrit par le bouton de la manivelle motrice.

OC = manivelle motrice à mouvement de rotation uniforme.

O_1CB = manivelle présentant une coulisse dans laquelle peut se déplacer le coulisseau C, mobile autour de O_1.

BA = bielle, s'articule en B ; A est assujetti à se déplacer sur une droite perpendiculaire à OO_1 (supposée passer par O_1). Positions extrêmes de A lorsque C est en L ou K.

Mouvement aller de A correspond au parcours KDL du bouton C.

Mouvement retour correspond à LEK. Diagrammes des espaces et des vitesses de deux points reliés par ce mécanisme (fig. 2).

2. **A rotation alternative** (fig. 3).

Le centre O_1 de la manivelle est extérieur au cercle décrit par le bouton **c** de la manivelle motrice.

Le déplacement de A se fait suivant une perpendiculaire à OO_1.

OC = manivelle motrice à mouvement de rotation uniforme.

O_1CB = manivelle mobile autour de O_1 ; présente une coulisse dans laquelle peut se déplacer le coulisseau C.

BA = bielle articulée en B sur O_1CB.

— Positions extrêmes de A lorsque C est en L ou K.

— Mouvement aller de A correspond au parcours KEL du bouton C.

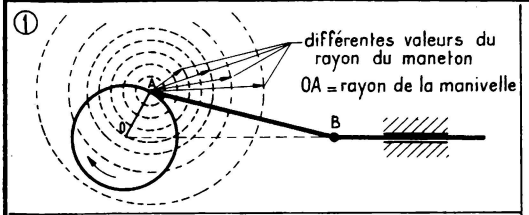
— Mouvement retour correspond à KDL.

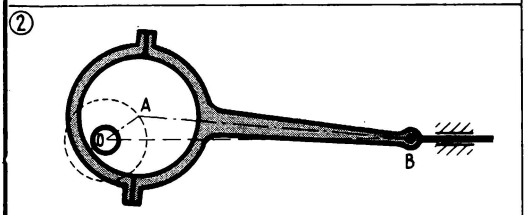
Les diagrammes e = f(t) et V = f'(t) de deux points reliés par ce mécanisme sont donnés par la figure 5.

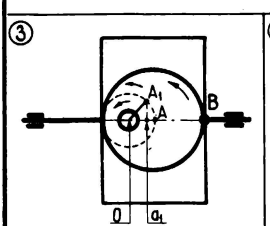
Dans la plupart des étaux-limeurs, la commande de l'outil se fait au moyen de ce mécanisme. Dans l'étau-limeur GSP la bielle AB est reportée en PO_1 ; la manivelle O_1B est articulée directement au point A du coulisseau (fig. 4).

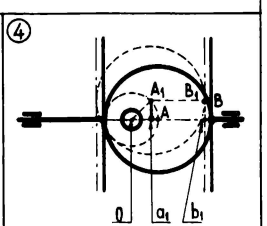
La variation de course de A s'obtient en modifiant la longueur OC (au moyen d'un plateau à rainure).

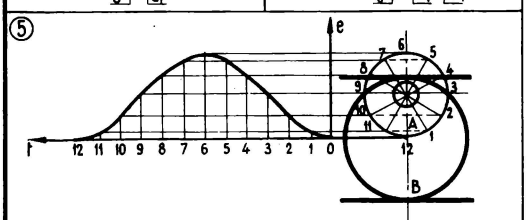
M. 85 EXCENTRIQUES

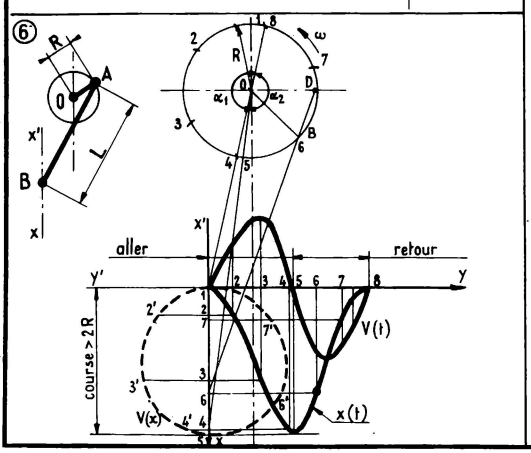












EXCENTRIQUE CIRCULAIRE A COLLIER (fig. 1).

Mécanisme qui est, au point de vue cinématique, équivalent au système bielle-manivelle dont la manivelle a pour longueur OA et la bielle AB. Mais le rayon du maneton est supérieur au rayon de la manivelle, le maneton devient un disque dont le centre A est excentré par rapport à l'axe O qui tourne sur lui-même. La distance OA est appelée **excentricité.**

La tête de bielle est remplacée par un collier en 2 parties réunies par des boulons ; l'un des demi-colliers porte la barre qui remplace la bielle (fig. 2).

EXCENTRIQUE CIRCULAIRE A CADRE (fig. 3 et 4).

Le disque A du dispositif précédent, au lieu de tourner dans un collier, tourne dans un cadre aux bords duquel il est tangent.

L'arbre O tournant d'un mouvement uniforme, il en est de même du point A centre du disque claveté sur O.

Le mouvement de la tige est rectiligne sinusoïdal (projection sur un diamètre du mouvement d'un point en rotation uniforme).

Équation du mouvement (fig. 4)

$Oa_1 = OA_1 \cos (OA, OA_1)$
$= OA \cos \omega t$
$Aa_1 = OA - Oa_1 = OA(1 - \cos \omega t)$.
$Aa_1 = e \quad OA = R$

$$\boxed{e = R(1 - \cos \omega t)}$$

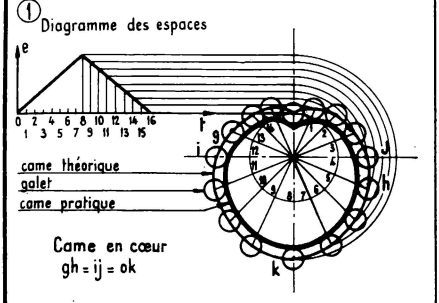
B est passé de B en B_1.
$A_1B_1 = a_1b, = AB = R$
d'où $Bb_1 = Aa_1 = R(1 - \cos \omega t)$.
Diagramme des espaces (fig. 5).

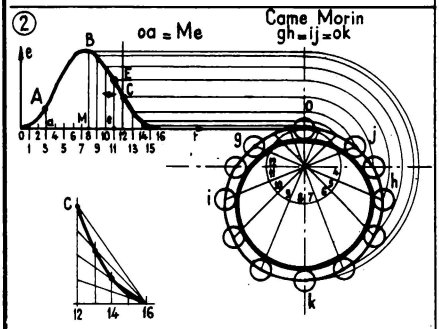
MANIVELLE EXCENTRÉE (fig. 6).

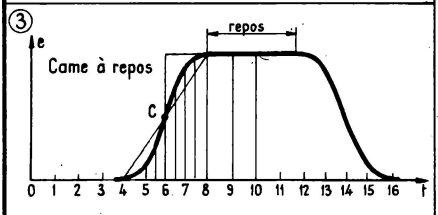
En déplaçant le centre O de la manivelle du système bielle-manivelle par rapport à l'axe de translation X'X, le système devient dissymétrique.

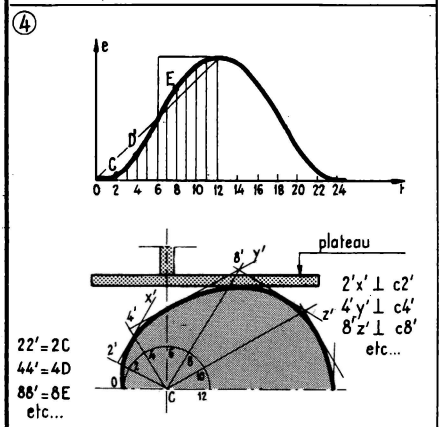
Les points extrêmes de la translation sont à L + R et L — R du centre O.

Les arcs de rotation 1-2-3-4 et 5-6-7-8-1, inégaux pour une même course du pied de bielle B, correspondent l'un à l'aller (α_1), l'autre au retour (α_2). La course est supérieure à 2R. La vitesse de l'outil, solidaire de B, en chaque point est égale à $\omega \times OD$. Diagrammes figure 6.









Définition.

Solide tournant autour d'un axe et qui appuie sur un deuxième solide de façon à lui communiquer un mouvement périodique. Le premier solide a, en général, un mouvement circulaire uniforme et le deuxième solide un mouvement rectiligne alternatif.

CAMES A GALETS CONDUISANT UNE TIGE GUIDÉE

Came en cœur (fig. 1).

Les mouvements de la tige guidée solidaire du galet sont rectilignes uniformes à l'aller et au retour, et ont même durée.

Le diagramme des espaces est formé de deux demi-droites de pentes opposées par rapport à t/2 (t = durée d'un tour de la came).

La figure 1 indique le tracé de la came théorique qui est le lieu des centres du galet. La courbe enveloppe des positions du galet, intérieure à la came théorique, est la came pratique. Il y a une courbe enveloppe des galets, extérieure à la came théorique. Ces deux courbes peuvent délimiter une rainure dans laquelle serait logé le galet dont l'axe serait alors perpendiculaire au plan de la came.

Came MORIN (fig. 2).

Les mouvements de la tige, rectilignes et de même durée à l'aller et au retour, sont uniformément variés. Les changements brusques de vitesse et les chocs sont ainsi évités. La courbe des espaces est formée de quatre arcs de parabole qui se raccordent deux à deux suivant la même tangente aux points A, B, C (fig. 2).

Remarque.

Dans les deux cames précédentes les diamètres sont égaux $gh = ij = ok = \ldots$

$Od = x \quad Me = x_1 \quad x = x_1$

$dD = ax^2 \quad eE = MB - ax_1^2$

$dD + eE = ax^2 + MB - ax_1^2 = MB = \text{constante}.$

Cames à repos.

Le déplacement comporte des repos; le diagramme des espaces comprend des segments de droite parallèles à l'axe des temps (fig. 3).

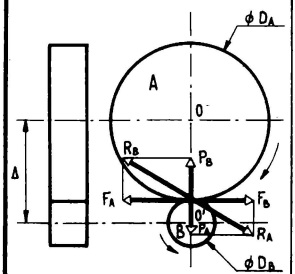
Cames à plateau ou à barre (fig. 4).

Les pressions latérales de la tige sur ses guides sont évitées.

Porter sur chaque rayon l'ordonnée correspondante du diagramme des espaces, par le point obtenu la perpendiculaire à ce rayon. Le profil de la came est l'enveloppe des droites qui représentent les positions successives de la barre dans son mouvement relatif par rapport à la came.

M. 87 ROUES DE FRICTION

①



ROUES CYLINDRIQUES DE FRICTION

$\overrightarrow{P_A}$ et $\overrightarrow{P_B}$ étant les poussées de A sur B et de B sur A, on a $\overrightarrow{P_A} \uparrow\uparrow - \overrightarrow{P_B}$ (fig. 1).

f = coefficient de frottement des garnitures.

F_A maximum $= fP_B$.

A motrice (rayon R_A) — B entraînée (rayon R_B).

Moment du couple résistant sur B : $\mathcal{M}_r = F_B \cdot R_B$.

Si $F_A = fP_B < F_B$, A patine sur B, sans l'entraîner.

Si $F_A = fP_B > F_B$, A entraîne B sans glissement.

Si $F_A = F_B$ A est sur le point de patiner.

Entraînement sans glissement

$$\boxed{\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{N_A}{N_B} = \frac{R_B}{R_A} = \frac{D_B}{D_A}}.$$

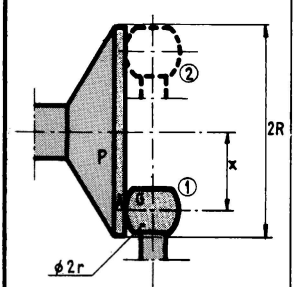
Nécessité d'une poussée de A sur B, d'où moment de frottement important sur les paliers

$$F_A = \frac{1\,432\,\mathcal{P}}{D_A N_A} \qquad \text{et} \qquad F_A \leqslant fP_B.$$

Puissance maximum transmise en *ch*.

$$\mathcal{P}_{max} = fP_B \times \frac{D_A N_A}{1\,432} = fP_B \frac{D_B N_B}{1\,432}.$$

②



Application industrielle. Variateur de vitesses à axes perpendiculaires (fig. 2). Le plateau P entraîne par friction le galet G. Au contact en A, même vitesse linéaire sur P et G, $v = \frac{\pi x n}{30}$, varie avec x ; réalisé par déplacement de G sur son axe. Sens de marche inverse lorsque G passe de l'autre côté de l'axe du plateau.

G peut entraîner un deuxième plateau P′ dont l'axe est parallèle, ou dans le prolongement de celui de P.

ROUES CONIQUES DE FRICTION (fig. 3).

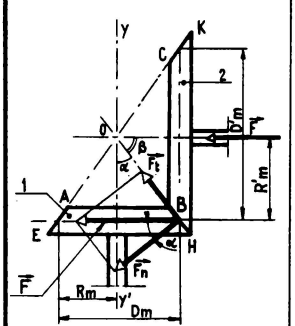
Employées sur arbres à axes perpendiculaires et situés dans le même plan.

Tous les points de la génératrice commune BH doivent avoir même vitesse linéaire ; donc sommet commun des cônes à l'intersection O des axes.

$$V = \frac{\pi RN}{30} = \frac{\pi R'N'}{30} \qquad \text{d'où} \qquad RN = R'N'.$$

$$\boxed{\frac{N'}{N} = \frac{R}{R'} = \text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta}$$

③



quels que soient R et R′, à la seule condition qu'ils soient les rayons du point de contact.

Puissance maximum transmise.

(1) roue menante (2) roue menée

$\overrightarrow{F}$ = poussée sur l'axe de (2), $\overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_t} + \overrightarrow{F_n}$, F_{max} de (1) sur (2) $= fF_n = fF \cos \alpha = F_1$ (effort tangentiel) ;

or $F_1 = \frac{1\,432\,\mathcal{P}}{D_m N}$ d'où $\boxed{\mathcal{P} \leqslant \frac{fFD_m N \cos \alpha}{1\,432}}$.

Conviennent pour grandes vitesses et faibles puissances.

Problème. Calcul des dimensions des roues. On donne F = 0,5 *ch* ; N = 3 000 *tr/mn* ; N′ = 1 000 *tr/mn* ; f = 0,35. Poussée axiale F = 50 *kgf*.

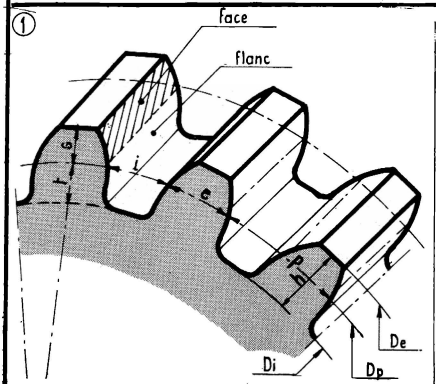
Solution.

$$\text{tg } \alpha = \frac{N'}{N} = \frac{1}{3} ; \qquad \alpha \simeq 18° 30' ; \qquad \beta \simeq 71° 30'.$$

$$D_m = \frac{\mathcal{P} \times 1\,432}{fFN \cos \alpha} = \frac{0{,}5 \times 1\,432}{0{,}35 \times 50 \times 3\,000 \times 0{,}948} \simeq 0{,}024\ m.$$

$D'_m \simeq 0{,}072\ m$.

ENGRENAGES CYLINDRIQUES DROITS (I)

① 

Cercle de tête ou extérieur $\phi = D_e$
Cercle de pied ou intérieur $\phi = D_1$
Cercle primitif (de friction) $\phi = D_p$

Saillie de la denture $s = \frac{D_e - D_p}{2}$

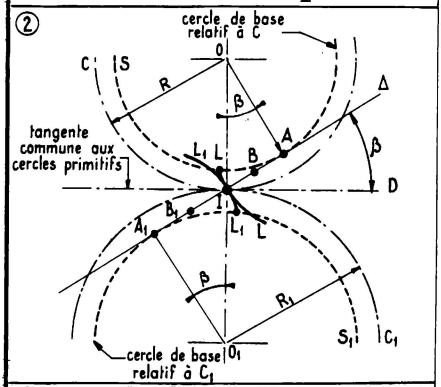
Creux de la denture $t = \frac{D_p - D_1}{2}$

Hauteur de la dent $h = s + t = \frac{D_e - D_1}{2}$

Epaisseur de la dent e, intervalle $i = e$

Module de la denture $M = \frac{D_p}{Z}$

Z = nombre de dents, pas $p = \frac{\pi D_p}{Z} = \pi M$

② 

Denture normale S = M ; t = 1,25 M ; h = 2,25 M
Modules normalisés NF E 23—011

Principaux	Secondaires	Principaux	Secondaires	Principaux	Secondaires
0,5	0,55	2	2,25	8	9
0,6	0,7	2,5	2,75	10	11
0,8	0,9	3	3,5	12	14
1,0	1,125	4	4,5	16	18
1,25	1,375	5	5,5	20	22
1,5	1,75	6	7	25	—

CONDITIONS D'ENTRAINEMENT

Glissement des deux cylindres de friction l'un par rapport à l'autre évité en les munissant de dents. Le couple d'engrenages cylindriques obtenus doit satisfaire aux conditions suivantes :

1. Même rapport de vitesses angulaires qu'avec cylindres de friction.
2. Continuité de conduite assurée ; à tout instant, il doit y avoir au moins une dent de l'une des roues en contact avec une dent de l'autre.

Définitions.

Pignon : La plus petite des roues de l'engrenage.

Crémaillère : La grande roue ayant un rayon infini, sa rotation devient une translation.

CONDITIONS D'ENGRÈNEMENT

1. Les profils des dents doivent être conjugués, c'est-à-dire rester tangents pendant tout le temps où ils assurent la transmission.
2. Les pas et les modules doivent être les mêmes pour les deux roues.
3. Le creux de chaque roue doit être au moins égal à la saillie de l'autre.

Engrenages extérieurs à développante de cercle.

Les deux cercles primitifs (C) et (C_1) de rayons R et R_1 (fig. 2) correspondent aux rotations $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega_1}$. (L) profil lié à (C), (L_1) profil conjugué lié à (C_1).

(L) et (L_1) en contact en I ont pour normale commune en ce point la droite Δ qui fait avec la droite D, tangente commune aux deux cercles en I, l'angle β appelé angle de pression.

$OA = R \cos \beta$ $\quad O_1A_1 = R_1 \cos \beta$.

Δ = droite d'action, elle est fixe.

$V_A = \omega \cdot OA = \omega R \cos \beta$.

$V_{A_1} = \omega_1 R_1 \cos \beta$ et $V_A = V_{A_1}$.

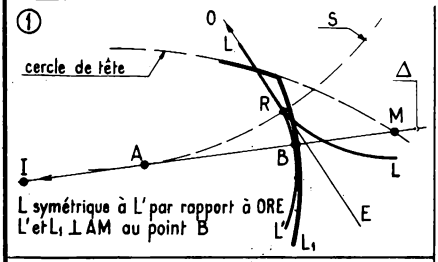
Δ roule sans glisser sur les cercles (S) et (S_1) de rayons OA et O_1A_1 : ce sont les cercles de base, ils sont tangents à Δ.

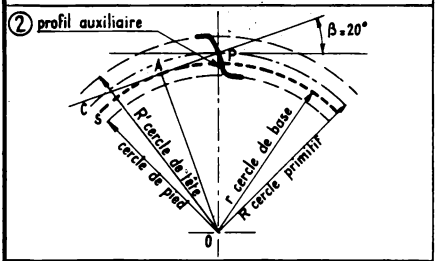
Arc de conduite (voir aussi fig. 5, M. 89).

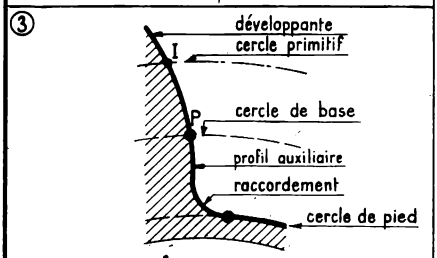
BB_1 = ligne d'action, dont le maximum est AA_1. Pendant que le point de contact I des profils conjugués décrit BB_1 à la vitesse $\omega R \cos \beta = \omega_1 R_1 \cos \beta$, un point quelconque de (C) ou de (C_1) décrit, à la vitesse $\omega R = \omega_1 R_1$ un arc de longueur $\frac{BB_1}{\cos \beta}$: c'est l'arc de conduite

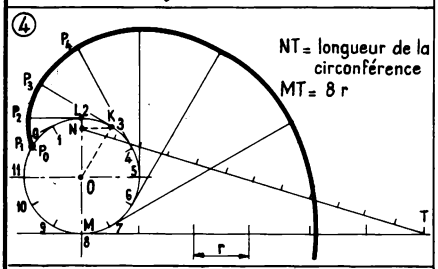
$\frac{B_1 I}{\cos \beta}$ = longueur arc d'approche, $\frac{IB}{\cos \beta}$ = longueur arc de retrait.

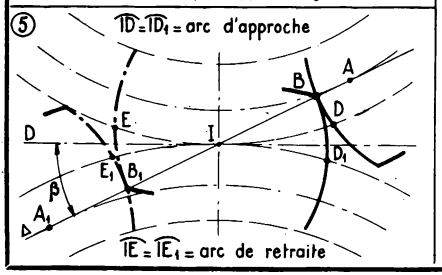
M. 89 ENGRENAGES CYLINDRIQUES DROITS (2)











ÉTUDE DU PROFIL DE DENTURE

Interférences (fig. 1).

La saillie est choisie indépendamment de R ou R_1, il peut donc arriver que le cercle de tête coupe la ligne d'action hors de l'intervalle A_1A, par exemple en M à droite de A.

Au-delà de A le profil conjugué théorique L' de L_1 présente une concavité vers le centre instantané de rotation A (L' tangent à L_1 en B). Pratiquement le profil conjugué est L symétrique de L' par rapport à la tangente de rebroussement OE. (L coupe donc L_1 au lieu de lui être tangent).

On dit qu'il y a interférence.

Ceci a lieu lorsque $IM > IA$ ou $IM_1 > IA_1$.

Profil auxiliaire d'évidement.

Si la ligne d'action BB_1 est voisine de son maximum AA_1, ou B près de A, le cercle de pied de C sera intérieur au cercle de base S (fig. 2) de la développante L relative à C.

Il faudra prolonger cette développante par un profil auxiliaire jusqu'au cercle de pied. Ce profil ne doit pas gêner la conduite ; les dents de C_1 ne doivent pas appuyer sur ce profil en empêchant le contact des profils conjugués (fig. 3).

Profil auxiliaire nécessaire si $h > R\,(1 - \cos\beta)$.

Construction d'une développante (fig. 4).

La tangente au cercle roule sans glisser sur celui-ci.

La longueur d'un segment de tangente KP_3, par exemple, au point de division 3 est égale à celle de l'arc $\overset{\frown}{P_0K}$ compris entre les divisions 0—3, c'est à dire à 3 divisions de NT.

Tracé de profil des dents.

Tracer les cercles primitifs tangents en I. Par I mener Δ faisant avec D l'angle β = angle de pression, égal à 20°. Les perpendiculaires OA et O_1A_1 sur Δ déterminent les cercles de base S et S_1.

Faire rouler Δ sur S ; la trajectoire de I dans ce mouvement est une développante qu'on limite aux cercles de tête et de base.

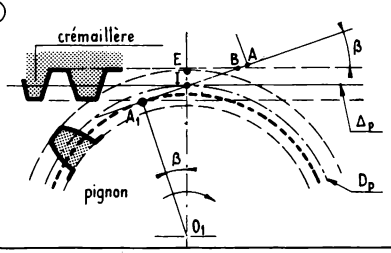
On raccorde ce profil au cercle de pied par un profil auxiliaire d'évidement.

Le profil conjugué de la dent de l'autre roue est obtenu en faisant rouler Δ sur S_1.

Dans un tracé approché, on remplace la développante par l'arc de cercle de centre A de rayon AI.

PIGNON-CRÉMAILLÈRE

M. 90

① 

SYSTÈME PIGNON-CRÉMAILLÈRE (fig. 1).

On veut obtenir une vitesse de translation **V** de la crémaillère connaissant la vitesse angulaire ω du pignon.

1° Détermination des éléments de la denture du pignon.

La droite primitive de la crémaillère roule sur le cercle primitif du pignon :

$$V = \frac{\omega D_p}{2} = \frac{\omega MZ}{2} \qquad Z = \frac{2V}{\omega M}$$

Si la valeur trouvée n'est pas entière, on prend pour Z la valeur qui s'en rapproche le plus :

$D_p = MZ$, $D_e = M(Z + 2)$, $D_i = M(Z - 2{,}25)$.

2° Crémaillère.

Le pas est déterminé par le module du pignon $p = \pi M$.

La longueur de la crémaillère doit être supérieure à la course maximum. Distance de l'axe du pignon à la droite primitive de la crémaillère

$$\frac{D_p}{2} = \frac{MZ}{2}$$

Application.

Soit M = 5.
Vitesse de la crémaillère 15 *m/mn.*
Vitesse de rotation du pignon 30 *tr/mn.*

Solution.

Nombre de dents du pignon :

$$V = \frac{15\,000}{60} = 250\ mm/s$$

$$\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{30\pi}{30} = \pi\ rd/s$$

$$Z = \frac{2V}{\omega M} = \frac{2 \times 250}{\pi \times 5} = \frac{100}{\pi} \simeq 32 \text{ dents.}$$

Caractéristiques du pignon :

$D_p = 5 \times 32 = 160\ mm.$ $D_e = 5 \times 34 = 170.$
$D_i = 5 \times 29{,}75 = 148{,}75\ mm.$
$h = 2{,}25\ M = 2{,}25 \times 5 = 11{,}25\ mm.$

Crémaillère :

Pas $p = 5\pi \simeq 15{,}7\ mm.$

Vitesse exacte :

$$V = \frac{\omega MZ}{2} = \frac{\pi \times 5 \times 32}{2} \simeq 251\ mm/s$$

soit 15,06 *m/mn.*

Problème sur les engrenages.

Déterminer les caractéristiques d'un engrenage taillé, en acier, pour lequel R pratique = 10 *kgf/mm²* devant transmettre 14 *ch*; distance entre axes 360 *mm*; vitesses de rotation roue et pignon 50 *tr/mn* et 250 *tr/mn*; la roue est menante.

Solution.

Détermination du module :

$$M \geqslant 2{,}34\sqrt{\frac{F}{kR}} \qquad \text{soit} \qquad k = 10$$

$$F = \frac{1\,432\mathcal{P}}{D_p N} \qquad \frac{D_p}{D'_p} = \frac{N'}{N} \qquad \frac{D_p + D'_p}{2} = \Delta$$

$$\frac{D_p}{D'_p} = \frac{250}{50} = 5 \qquad D_p + D'_p = 0{,}36 \times 2 = 0{,}72\ m.$$

$6\,D'_p = 0{,}72.$ $D'_p = 0{,}12\ m.$ $D_p = 0{,}60\ m.$

$$F = \frac{1\,432 \times 14}{0{,}6 \times 60} \simeq 670\ kgf$$

$$M \geqslant 2.34\sqrt{\frac{670}{10 \times 10}} \simeq 6 \qquad M = 6\ mm.$$

Nombre de dents :

$$D_p = MZ \qquad Z = \frac{D_p}{M} = \frac{600}{6} = 100$$

$$Z' = \frac{D'_p}{M} = \frac{120}{6} = 20.$$

La roue aura 100 dents, le pignon 20 dents.

Alésages normaux :

Roue $d = 120\sqrt[3]{\frac{\mathcal{P}}{N}} = 120\sqrt[3]{\frac{14}{50}} \simeq 78{,}5$
soit 80 *mm.*

Pignon : $d' = 120\sqrt[3]{\frac{14}{250}} \simeq 46\ mm$
soit 50 *mm.*

Caractéristiques des roues :

Roue :
$D_p = 600\ mm.$ $D_e = D_p + 2M = 612\ mm.$
$D_i = D_p - 2{,}5M = 585\ mm.$

Pignon :
$D'_p = 120\ mm.$ $D'_e = 132\ mm.$
$D_i = 105\ mm.$

Hauteur commune des dents :
$h = 2{,}25M = 13{,}5\ mm.$

Vérification de l'entraxe :

$$\Delta = \frac{M(Z + Z')}{2} = \frac{6 \times 120}{2} = 360\ mm.$$

Longueur de la denture $10M = 60\ mm.$

Poids approximatif de la roue :

$$p = \frac{(Z - 10) \times M^3 \times kM}{6\,700} = \frac{(100 - 10) \times 6^3 \times 10}{6\,700}$$

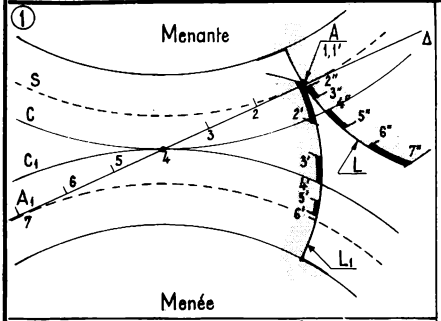
$$p \simeq 29\ kgp.$$

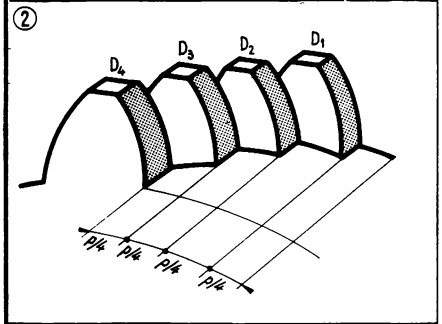
Poids du pignon :

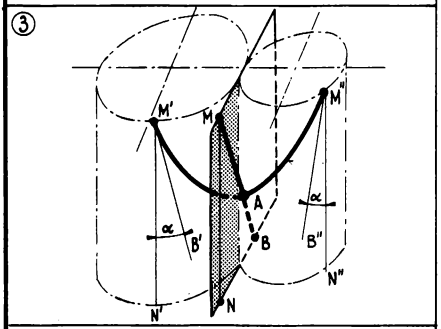
$$p' = \frac{(20 - 10) \times 6^3 \times 10}{6\,700}$$

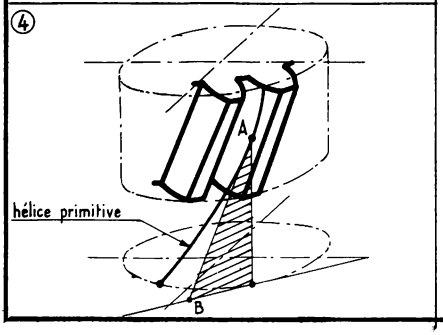
$$p' \simeq 3{,}3\ kgp.$$

M. 91 ENGRENAGES HÉLICOÏDAUX (I)









Glissement des dentures droites.

La construction (fig. 1) faite pour six contacts des développantes L et L_1 montre qu'aux arcs 1″ 2″, 2″ 3″, 3″ 4″, 4″ 5″, 5″ 6″ décrits sur L correspondent les arcs 1′ 2′, 2′ 3′, 3′ 4′, 4′ 5′, 5′ 6′ décrits par L_1. Ces arcs n'étant pas égaux, pour des rotations égales des roues, il y a glissement des dents l'une par rapport à l'autre.

A et B étant les arcs d'approche et de retrait les expressions du glissement sont :

$$G_a = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right)\frac{A^2}{2}\cos\beta$$

$$G_r = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right)\frac{B^2}{2}\cos\beta$$

Le glissement diminue lorsque β augmente, il est maximum en approche et en retrait. Il y a absorption de travail par frottement et usure des dents vers la tête et vers le pied. P étant la pression au contact, **f** le coefficient de frottement, le travail de frottement est :

$\mathfrak{T}_a = fP \times G_a = kA^2$ en approche,

$\mathfrak{T}_r = fP \times G_r = kB^2$ en retrait,

au total : $\mathfrak{T}_a + \mathfrak{T}_r = k(A^2 + B^2)$

Denture de HOOKE (fig. 2).

En coupant les roues par des plans perpendiculaires aux axes, quatre par exemple (fig. 2) et en décalant ces disques de $\frac{1}{4}$ de l'arc de conduite, les éléments D_1 sont d'abord en contact, après une rotation de $\frac{1}{4}$ de l'arc de conduite les éléments D_2 viendront en contact, etc. Le travail des forces de frottement est :

$$4k\left[\left(\frac{A}{4}\right)^2 + \left(\frac{B}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{4}k(A^2 + B^2)$$

ENGRENAGES HÉLICOIDAUX

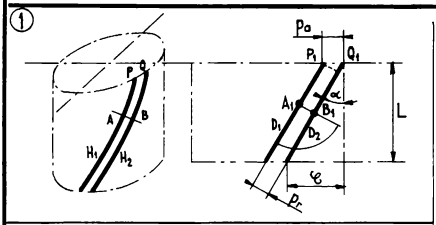
Augmenter indéfiniment le nombre des disques ci-dessus, les points correspondants des profils sont alors situés sur une hélice par rapport aux génératrices du cylindre primitif.

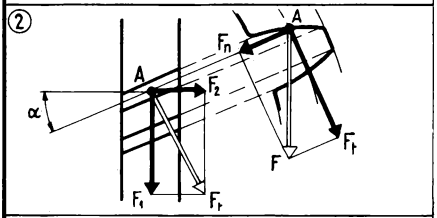
Pour les deux roues conjuguées les hélices sont de même pas, mais en sens inverses pour les engrenages extérieurs (fig. 3).

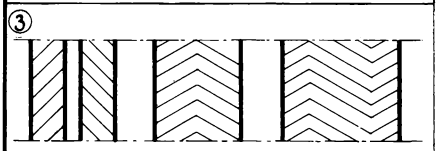
Hélice primitive (fig. 4).

Une droite AB tracée sur le plan tangent intérieur aux deux cylindres primitifs et faisant un angle α avec la génératrice commune (fig. 3) donne, lorsque le plan tangent s'enroule sans glisser sur chaque cylindre les hélices primitives relatives à ces cylindres.

ENGRENAGES HÉLICOÏDAUX (2) — M. 92







Problème.

Déterminer les éléments nécessaires à l'exécution des dentures de deux roues hélicoïdales dont les vitesses de rotation sont 120 *tr/mn* et 280 *tr/mn* ; distance approximative des axes : 250 *mm* ; module réel 6 ; inclinaison hélices 30°.

Solution.

1° Détermination du nombre de dents :

$$\frac{N}{N'}=\frac{Z'}{Z}=\frac{280}{120}=\frac{7}{3}\ ;\ M_a=\frac{M_r}{\cos\alpha}=\frac{6}{\cos 30°}=\frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$D_a+D'_a=500=\frac{12}{\sqrt{3}}(Z+Z')$$

$$\frac{Z'}{Z}=\frac{7}{3}\ \text{et}\ Z'+Z=\frac{500\sqrt{3}}{12}\ \text{d'où}\ \mathbf{Z=21\ ;\ Z'=49.}$$

2° Distance exacte entre axes :

$$\Delta=\frac{12}{2\sqrt{3}}(21+49)\simeq \mathbf{242{,}5}\ mm.$$

3° Diamètres primitifs :

$$D=21\times\frac{6}{\cos\alpha}\simeq\mathbf{145{,}5}\ mm\ ;\ D'=\frac{49\times 6}{\cos\alpha}\simeq\mathbf{339{,}5.}$$

4° Largeur minimum de la denture :

L sin $\alpha > \pi M_r$ ou L $> 12\,\pi$ ou L $> 37{,}7$ *mm*.

Remarque. Si l'entraxe avait été imposé, au lieu d'être approximatif, il eût fallu modifier α

$$2\Delta=\frac{M_r}{\cos\alpha}(Z+Z')\ ;\ \cos\alpha=\frac{M_r(Z+Z')}{2\Delta}=0{,}84\ ;$$

$$\alpha=\mathbf{32°\ 51'}.$$

Dentures hélicoïdales.

La section d'une roue hélicoïdale par un plan perpendiculaire à son axe donne le dessin de la roue droite dont elle dérive.

Le pas et le module de la roue droite sont le pas apparent p_a et le module apparent M_a de la roue hélicoïdale.

AB = hélice orthogonale aux hélices primitives H_1 et H_2 de deux dents consécutives (fig. 1).

Pas réel = p_r = longueur A_1B_1 de l'arc AB.

Module reél = $M_r=\dfrac{p_r}{\pi}$.

Arc PQ = $P_1Q_1 = p_a$ $\quad p_r = p_a \cos\alpha$

$M_r = M_a \cos\alpha$

Arc de conduite $\mathcal{C}$ = L tg α.

Pour la continuité, il faut L tg $\alpha > p_a$ ou L tg $\alpha > \dfrac{p_r}{\cos\alpha}$ ou enfin L sin $\alpha > \pi M_r$.

Mêmes dimensions normalisées que pour roues droites.

Poussée axiale.

Le contact de deux hélices conjuguées se fait en un point, soit A (fig. 2) et la poussée $\vec{F}$ agit dans un plan perpendiculaire à l'hélice suivant la droite de poussée.

Composantes de F :

$\vec{F_t}$ tangente au cylindre et normale à l'hélice.

$\vec{F_a}$ perpendiculaire à l'axe.

$\vec{F_t}$ a pour composantes :

$\vec{F_1}$ force tangentielle qui provoque la rotation ;

$\vec{F_2}$ poussée axiale, d'où nécessité de butées.

$F_2 = F_1$ tg α, croît avec α (en général 20° à 30°).

Roues à chevrons.

Deux roues symétriques accolées permettent de supprimer les butées : les efforts axiaux égaux et opposés s'annulent.

Ce sont les roues à chevrons (fig. 3).

Avantage : deux points de contact au même instant sur les roues conjuguées.

Augmentation du nombre des points de contact avec les roues à chevrons multiples.

Rendement excellent.

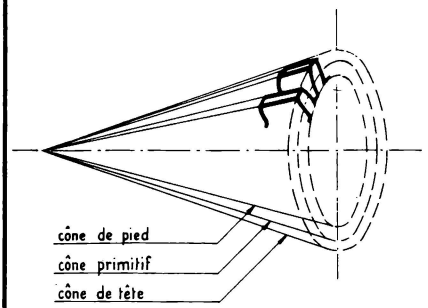
Conviennent aux grandes vitesses.

Permettent de transmettre des puissances plus grandes que les roues hélicoïdales simples.

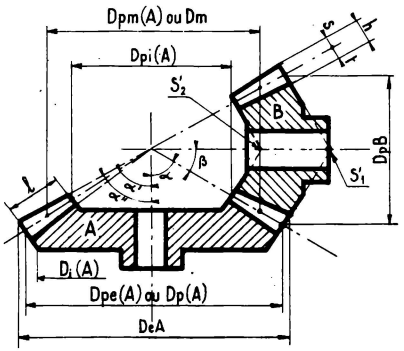
Sont silencieuses.

M. 93 ENGRENAGES CONIQUES

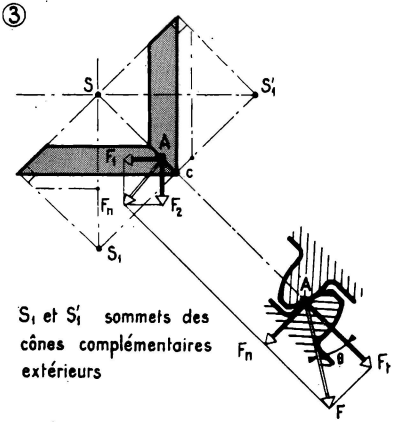
①



②



③



S_1 et S'_1 sommets des cônes complémentaires extérieurs

DENTURE DROITE

Les dents du cône de friction s'amincissent quand on se rapproche du sommet du cône (fig. 1 et 2).

α et β = angles au sommet, sont ceux des cônes primitifs $\alpha + \beta = 90°$ (fig. 2).

Denture limitée par les cônes S'_2 et S'_1 dont les génératrices sont perpendiculaires à celles du cône primitif ; ce sont les cônes complémentaires intérieur et extérieur.

Longueur de la dent L = longueur de la génératrice commune aux cônes complémentaires de deux roues associées.

Rapport des vitesses.

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{Z_B}{Z_A} = \frac{D_{pB}}{D_{pA}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \text{ (fig. 2).}$$

Module au rayon moyen $M = 2{,}34\sqrt{\frac{F}{kR_e}}$

la dent est trapézoïdale.

Poussée axiale (fig. 3).

Rabattre la section par plan perpendiculaire à la génératrice de contact en son milieu. La poussée $\overrightarrow{F}$ fait avec la tangente au cercle primitif l'angle de pression θ.

$\overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_t} + \overrightarrow{F_n}$.

$\overrightarrow{F_t}$ = force tangentielle $F_t = \frac{1\,432\,\mathcal{P}}{D \cdot N}$.

$F_n = F_t \cdot \operatorname{tg}\theta$, normale à la génératrice.

$\overrightarrow{F_n}$ a pour composantes :

$\overrightarrow{F_1}$ poussée latérale

et $\overrightarrow{F_2}$ poussée axiale; nécessité de butées.

Application.

Déterminer les caractéristiques d'un engrenage conique transmettant 8 *ch* à 900 *tr/mn* sur le pignon ; la roue tourne à 720 *tr/mn*, L = 10M, rayon moyen du pignon 6 *cm*, R pratique = 6 *kgf/mm²*.

Solution.

Angles des cônes primitifs :

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{900}{720} = \frac{5}{4} \qquad \alpha + \beta = 90°$$

$\sin\alpha = \cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{4}$, $\beta = 51°20'$, $\alpha = 38°40'$

Module.

Effort tangentiel au rayon moyen :

$$F = \frac{1\,432 \times 8}{0{,}12 \times 900} = 106 \text{ kgf.}$$

$$M = 2{,}34\sqrt{\frac{106}{10 \times 6}} = 3{,}11.$$

Au gros bout de la denture $\frac{M}{M_{moyen}} = \frac{D_{pe}}{D_{pm}}$.

$D_p = D_m + L \sin\alpha$.

$D_p = 120 + 10M \sin\alpha = 120 + 31{,}1 \times 0{,}625 = 139{,}44$.

$M = 3{,}11 \times \frac{139{,}44}{120} = 3{,}61$ (prendre **M = 4**).

Nombre de dents :

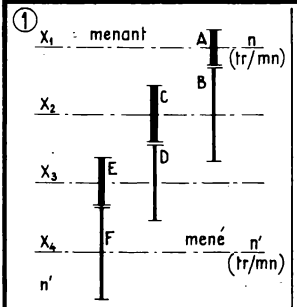
$Z_A = \frac{D_{pA}}{M} = \frac{139{,}44}{4} \simeq 32$. $Z_B = 32 \times \frac{5}{4} = 40$.

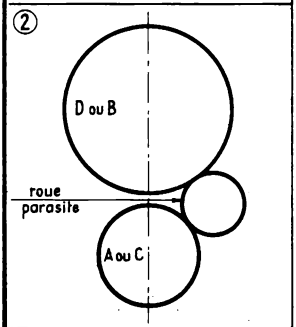
Diamètres primitifs réels :

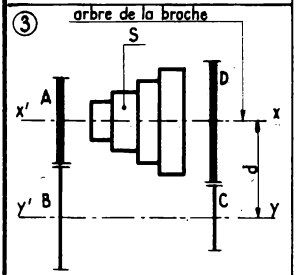
$D_{pA} = MZ_A = 4 \times 32 = 128$. $D_{pB} = 4 \times 40 = 160$.

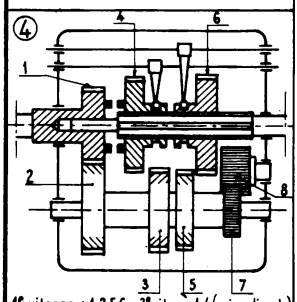
TRAINS D'ENGRENAGES

M. 94









TRAIN ORDINAIRE (fig. 1).

Combinaison de plusieurs couples d'engrenages utilisée lorsqu'on ne peut obtenir avec un seul couple le rapport de démultiplication voulu.

Raison d'un train d'engrenages.

Rapport du nombre de tours du dernier arbre mené à celui du premier arbre menant

$$r = \frac{N_F}{N_A} = (-1)^p \times \frac{Z_A \times Z_C \times Z_E}{Z_B \times Z_D \times Z_F} = \frac{\text{Produit des Z des roues menantes}}{\text{Produit des Z des roues menées}}$$

p = nombre des contacts extérieurs.

r a pour signe + si rotations des roues de même sens (p pair).

Signe — dans le cas contraire (fig. 1, signe —).

Roue parasite.

Roue portée par un axe intermédiaire (fig. 2) ; elle est menante et menée. Elle change le sens de rotation mais non le rapport des vitesses.

Problème. ***Harnais d'engrenages*** (fig. 3).

C'est un dispositif de changement de vitesses.

Mouvement transmis aux poulies étagées S ; autant de vitesses qu'il y a d'étages ;

Roue d'entrée D solidaire de l'arbre X peut être rendue solidaire de S ou en être séparée ;

D solidaire de S, l'arbre Y est écarté de X, B et C n'engrènent plus avec A et D : les vitesses de X sont celles données par S = marche à la volée ;

D dégagée de S, les roues dentées engrènent, rotation de X obtenue par les couples (A, B) et (C, D).

C'est la marche au harnais.

Raison du harnais : vitesses en progression géométrique. **N** = plus petit nombre de tours ; N' = plus grand nombre ; **q** = raison de la progression. Les diverses vitesses sont :

volée	harnais	volée	harnais	volée	harnais	volée	harnais
N'	N'q	N'q²	N'q³	N'q⁴	N'q⁵	N'q⁶	N'q⁷ = N

$$q = \sqrt[7]{\frac{N}{N'}}$$

c'est la raison du harnais, en général incommensurable ; valeur approchée q_1.

Conditions de fonctionnement : q_1 est connue ; **d** = constant ; $Z_A + Z_B = Z_C + Z_D$; il faut d > rayon de D.

Application numérique.

Roues au module 3 ; roues A et C égales ; vitesses extrêmes 50 *tr/mn* et 300 *tr/mn* ; rayon de la plus grande poulie 100 *mm*.

Solution : $q = \sqrt[7]{\frac{50}{300}} \simeq 0{,}7742$; les roues étant égales deux à deux, le rapport de chaque couple est $\sqrt{q} = \sqrt{0{,}774} \simeq 0{,}88$.

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{Z_C}{Z_D} = \frac{88}{100} = \frac{22}{25} \qquad Z_A = Z_C = k \times 22$$
$$Z_B = Z_D = k \times 25.$$

Il faut :

$$\frac{D_A + D_B}{2} > 100 \quad \text{ou} \quad \frac{M(Z_A + Z_B)}{2} > 100$$
$$Z_A + Z_B \geqslant 67.$$

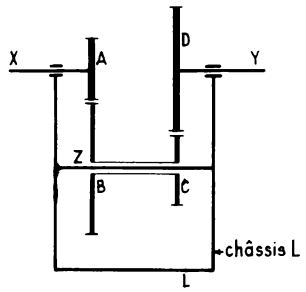
k = 2 permet de vérifier cette relation.

$Z_A = Z_C = 44$ $\quad Z_B = Z_D = 50$ $\quad d = \frac{3\,(44 + 50)}{2} = 141$ *mm*.

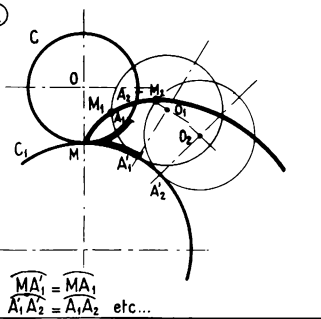
Fig. 4. Autre exemple :
Boîte de vitesses pour voitures automobiles.

M. 95 TRAINS ÉPICYCLOÏDAUX

①

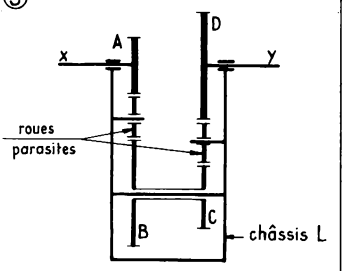


②

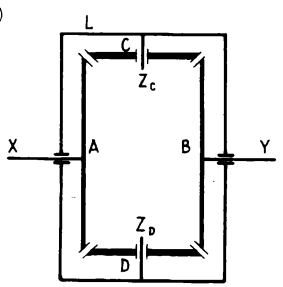


$\widehat{MA'_1} = \widehat{MA_1}$
$\widehat{A'_1A'_2} = \widehat{A_1A_2}$ etc...

③



④



Définition.

Train d'engrenages dans lequel l'axe X de la première roue est fixe et où les axes des roues intermédiaires sont portés par un solide invariable L appelé châssis qui peut tourner autour de l'axe X (fig. 1). L'arbre Y de la dernière roue est porté par le châssis mobile ou bien l'axe théorique de Y est fixe et dans ce cas Y est dans le prolongement de X.

L'axe intermédiaire Z est porté par le châssis mobile. Les 2 roues B et C, solidaires l'une de l'autre peuvent tourner librement autour de Z.

Un point d'une des roues B ou C décrit une épicycloïde par rapport à A ou D. L'épicycloïde est la trajectoire d'un point M d'une circonférence C qui roule sans glisser sur une circonférence C_1 (fig. 2).

Formule de WILLIS.

Un sens positif de rotation est choisi.

ω_1 = valeur algébrique de la vitesse angulaire de la première roue.
ω_n = valeur algébrique de la vitesse angulaire de la dernière roue.
ω_e = valeur algébrique de la vitesse angulaire du châssis.
r = raison du train ordinaire que l'on obtiendrait en immobilisant le châssis (voir M. 94).

$$r = \frac{\omega_n - \omega_e}{\omega_1 - \omega_e} = (-1)^p \times \frac{\text{Produit des Z des roues menantes}}{\text{Produit des Z des roues menées}}$$

Application.

Dans le train épicycloïdal de la figure 1, on maintient A fixe ; on donne $Z_A = 49$, $Z_B = 50$, $Z_C = 51$, $Z_D = 50$. Quel est le rapport entre la vitesse de rotation de l'arbre y et celle du châssis ?

Solution.

$$r = (-1)^2 \times \frac{Z_A \times Z_C}{Z_B \times Z_D} = \frac{49 \times 51}{50 \times 50} = \frac{50^2 - 1}{50^2}$$

$$\omega_1 = 0 \text{ donc } \frac{\omega_n - \omega_e}{-\omega_e} = \frac{50^2 - 1}{50^2} = -\frac{\omega_n}{\omega_e} + 1$$

$$\frac{\omega_n}{\omega_e} = \frac{1}{2\,500}$$

Mais on n'a pas $Z_A + Z_B = Z_C + Z_D$ avec le même module. Il faut relier A et B par une roue parasite, et D et C par une deuxième roue parasite (fig. 3).

Différentiel.

Dans le train de roues d'angles de la figure 4, $r = -1$.

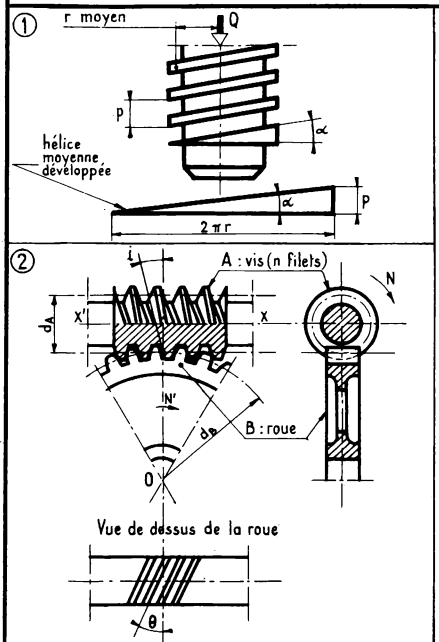
$$-1 = \frac{\omega_n - \omega_e}{\omega_1 - \omega_e} \quad \text{ou} \quad \omega_n + \omega_1 = 2\omega_e$$

$Z_A = Z_B$, C et D ont leurs axes portés par le châssis. Dans une automobile, la rotation du moteur est transmise au châssis.

Dans un déplacement rectiligne $\omega_1 = \omega_n = \omega_e$.

Dans un virage la roue extérieure doit tourner plus vite que la roue intérieure $\omega_1 > \omega_n$ mais on a toujours $\omega_1 + \omega_n = 2\,\omega_e$, donc C doit tourner autour de Z et le glissement de la roue intérieure est évité. La roue D permet une meilleure répartition des efforts.

VIS-ÉCROU, ROUE ET VIS SANS FIN | M. 96



Pas et modules apparents et normaux.

θ = angle d'inclinaison des hélices de la roue sur l'axe.

$p_r = p_a \cos\theta$ $\quad M_r = M_a \cos\theta$

$$M_r = \frac{Pr}{\pi} \qquad D_p = M_a Z$$

θ = i = angle d'inclinaison des filets de la vis sur l'axe.

$$\text{tg } i = \text{tg } \theta = \frac{p}{\pi d_p}$$

d_p = diamètre primitif de la vis.
= diamètre moyen + 2,5M_r.

p_1 = pas de la vis, p_a = pas de la denture.

n = nombre des filets.

$p_1 = p_a \cdot n = \pi M_a \times n$.

Roue $D_p = M_a Z$.

$$\text{vis } d_p = \frac{P_1}{\pi \text{ tg } i} = \frac{\pi M_a n}{\pi \text{ tg } i} = \frac{M_a n}{\text{tg } i}$$

$$\boxed{\frac{D_p \text{ (roue)}}{d_p \text{ (vis)}} = \frac{Z \text{tg } i}{n} = \frac{N \text{ (vis)}}{N' \text{ (roue)}} \text{ tg } i}$$

Vis tangente.

La roue est creuse, elle épouse la forme de la vis.

Vis globique : La vis épouse la forme de la roue.

VIS-ÉCROU

p = pas de la vis = pas de l'hélice décrite par un point situé sur le rayon moyen r du filet (fig. 1) $p = 2\pi r \text{ tg } \alpha$.

α = inclinaison du filet :

- 2° à 3° pour boulons et vis de serrage ;
- voisin de 10° pour vis à bois ;
- 30° à 45° pour vis réversibles.

Mouvements possibles.

1. **Écrou fixe, vis mobile,** mouvement hélicoïdal *(presse à copier, vérin).*
2. **Vis fixe, écrou mobile,** mouvement hélicoïdal *(écrou de serrage).*
3. **Écrou en rotation, vis en translation** *(clé à molette, vis de tendeur de tige).*
4. **Vis en rotation, écrou en translation** *(vis-mère d'un tour, machine à diviser).*

Déplacement.

Vis et écrou ont même pas et même section de filet.

Proportionnalité de l'angle de rotation θ de l'écrou et du déplacement rectiligne L suivant l'axe de la vis :

$$\frac{L}{\theta r} = \frac{p}{2\pi r} = \text{tg } \alpha$$

$$L = \theta r \text{ tg } \alpha \qquad \frac{L}{t} = \frac{\theta}{t} r \text{ tg } \alpha$$

$$\frac{\theta}{t} = \omega \qquad \frac{L}{t} = V$$

$$V = \omega r t \text{ tg } \alpha = \omega r \frac{p}{2\pi r} = \frac{\omega}{2\pi} p = np$$

n = nombre de *tr/s.*
v = vitesse de translation en *mm/s.*
p = pas en *mm.*

ROUE ET VIS SANS FIN (fig. 2).

L'axe X'X de la vis est orthogonal à l'axe O de la roue.

L'inclinaison des dents sur la génératrice de la roue est égale à celle des filets sur l'axe de la vis ; donc la roue est à denture hélicoïdale : cas particulier des engrenages hélicoïdaux dans le cas où les axes sont perpendiculaires, la vis faisant office de pignon dont le nombre de dents serait égal au nombre de filets par pas de la vis.

Rapport des vitesses.

$$\frac{N \text{ vis}}{N' \text{ roue}} = \frac{Z}{n} = \frac{\text{nombre de dents de la roue}}{\text{nombre des filets de la vis}}$$

VII

MOTEURS THERMIQUES ET HYDRAULIQUES

MOTEURS THERMIQUES

NOTIONS DE THERMODYNAMIQUE
MOTEURS A EXPLOSION
MOTEURS DIESEL
MOTEURS A TURBINES

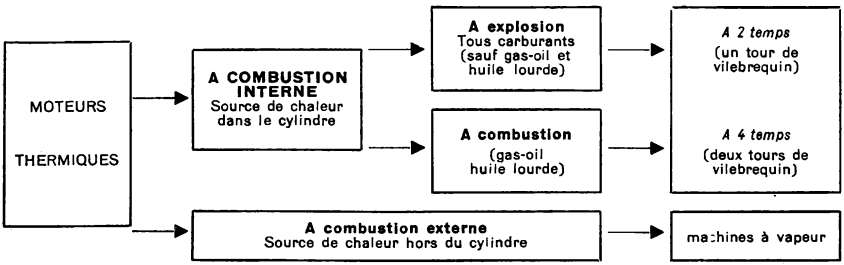
MOTEURS HYDRAULIQUES

TURBINES HYDRAULIQUES

M. 97 — MOTEURS THERMIQUES (I)

NOTIONS DE THERMODYNAMIQUE

Types de moteurs



Définition.

Les moteurs thermiques sont des machines transformant l'énergie calorifique (chaleur) en énergie mécanique (travail).

La **combustion** du carburant dans un **cylindre** dégage beaucoup de chaleur et libère sous faible volume et **forte pression p**, une grande quantité de gaz qui repousse la paroi mobile (**piston**) du cylindre (course motrice).

Le mouvement rectiligne du piston est transformé en mouvement circulaire continu par le système bielle-vilebrequin.

L'inertie des organes tournants est suffisante pour ramener le piston en sens inverse (course résistante).

Équivalence chaleur-travail.

La chaleur dégagée (Q) dépend du pouvoir calorifique (PC) du carburant. Elle se mesure en kilocalories *(kcal)* (millithermie, ou grande calorie).

1 *kcal* = quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 °C la température de 1 *kg* d'eau prise à 15 °C et p.a. = 76 *cm* de mercure;
1 thermie (*th*) = 1 000 millithermies (*mth*);
1 calorie-gramme (*calg*) = 0,001 *mth* = 0,001 *kcal*.

Équivalence. Pour un cycle fermé, avec seulement échange chaleur-travail, on a :

$$\boxed{W = J.\,Q.}$$

W en joules, Q en *cal* (J = 4,18).
W en *kgm*, Q en *kcal* (J = 427).

Exemple : massede 1*l* d'essence = 0,7 *kg* (PC = 11 000) fournit 11 000 × 0,7 = 7 700 *kcal* (ou 3 288 000 *kgm*). Une consommation de 10 *l* par heure correspond à un apport de puissance théorique :

$$P_{th} = \frac{3\,288\,000 \times 10}{3\,600 \times 75} \simeq 121\ ch \left(\begin{matrix}\text{voir} \\ \text{M 105}\end{matrix}\right)$$

Principe de Carnot.

Une machine thermique ne peut produire du travail que si elle possède deux sources de chaleur à des températures différentes :

— La **source chaude** (à température absolue T_2) où a lieu la combustion du carburant.

— La **source froide** à température T_1 (gaz d'échappement, radiateur, milieu extérieur très proche du moteur).

Théorème de Carnot.

Si les gaz en évolution prennent Q_2 *kcal* à la source chaude et cèdent Q_1 *kcal* à la source froide nous avons :

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}}$$

Rendement de Carnot.

Rendement thermique théorique maximum (que l'on ne peut pas atteindre).

— Travail fourni au moteur $W_2 = JQ_2$.
— Travail fourni par le moteur $W = J\,(Q_2 - Q_1)$.
— Rendement de Carnot $r_c = W : W_2$.

$$\boxed{r_c = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}}$$

Exemple

t_2 = 1 700 °C	T_2 = 1 700 + 273 = 1 973° K.
t_1 = 300 °C	T_1 = 300 + 273 = 573° K.

$$r_c = 1 - \frac{573}{1973} = \frac{1973 - 573}{1973} = \frac{1400}{1973} \simeq 0{,}7$$

soit 70 %

Energie interne (U) d'un mélange gazeux : énergie totale que ce mélange possède en réserve et peut fournir sous une seule forme ou sous plusieurs formes d'énergie : calorifique, chimique, électrique...

On ne peut pas connaître exactement U mais il est possible quelquefois de déterminer une variation de U lorsque le mélange gazeux a évolué d'une certaine façon.

Si un gaz passe de la température absolue T_1 à T_2 nous avons :

$$U_2 - U_1 = JC\,(T_2 - T_1)$$

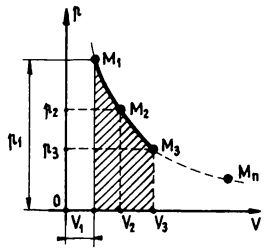
C. Chaleur spécifique moyenne entre T_1 et T_2 (chaleur spécifique moyenne = chaleur nécessaire pour élever de 1 °C la température de l'unité de masse du corps.

MOTEURS THERMIQUES (2)

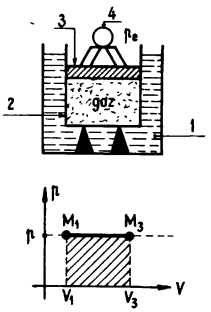
THERMODYNAMIQUE - LE MÉLANGE GAZEUX

M. 98

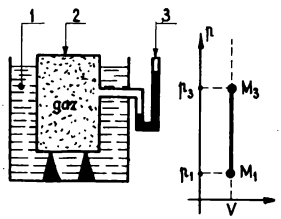
①



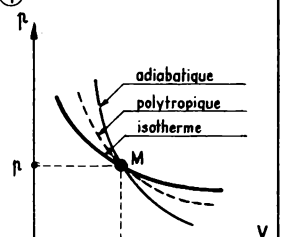
②



③



④



Caractéristiques d'un gaz (p, V, t).

p pression statique	t en degrés centésimaux (°C).
V volume	ou T en degrés KELVIN (°K).
t température	T (température absolue) = t + 273.

Etat d'équilibre. Les caractéristiques restent constantes.

Changement d'état (évolution ou transformation) par compression ou détente, par chauffage ou refroidissement.

Une au moins des caractéristiques **p, V, t** prend une nouvelle valeur.

Etat 1 (p_1, V_1, t_1) ⟶ **état 2** (p_2, V_2, t_2).

Ex. : compression p ↑, détente p ↓

Cycle. Evolution dans laquelle le fluide reprend périodiquement les mêmes caractéristiques.

Cycle fermé. Etats final et initial identiques.

Fig. 1. **Evolution isotherme** (t constante).

(p_1 V_1 t_1) ⟶ (p_2 V_2 t_1) ⟶ ($p_3V_3t_1$)...

Représentation graphique (CLAPEYRON) (diagramme pV).

Bien préciser les échelles choisies pour p et V. Les points M_1 M_2 M_3 M_4... sont les points figuratifs des différents états : M_1 (état initial), M_n (état final), M_1 M_2 M_3... (états intermédiaires).

La courbe M_1M_n est une isotherme.

$$ {}_1W_3 = 2{,}3\ RT \log \frac{V_3}{V_1} $$ ⟶ Travail mis en jeu entre 1 et 3.

Avec RT = $p_3 V_3$ ou $p_1 V_1$ ou $p_3 V_3$ à la température T.

W = surface hachurée, fig. 1, à l'échelle choisie.

Pour les gaz parfaits l'isotherme est une hyperbole équilatère.

Fig. 2. **Evolution isobare** (p constante).

(1) Eau chauffée ; (2) Cylindre section S ; (3) Piston ; (4) Poids P.

p_e. pression extérieure
p. pression du gaz

$$ p = p_e + \frac{P}{S} = \text{constante.} $$

M_1M_n, courbe isobare (droite parallèle à OV).

$V_1 = V_0\ (1 + \alpha t_1)$ et $V_3 = V_0(1 + \alpha t_3)$.

V_0, volume à 0° ; α, coefficient, $\alpha = 1/273$.

$$ {}_1W_3 = p(V_3 - V_1) $$ Travail mis en jeu (surface d'un rectangle).

Fig. 3. **Evolution isochore** (V constant).

(1) Eau chauffée ; (2) Cylindre de volume constant ; (3) Manomètre.

M_1M_3, courbe isochore : droite parallèle à Op.

Un gaz dont le volume reste constant ne fournit pas de travail. On peut écrire :

$p_1 = p_0(1 + \beta t_1)$ et $p_3 = p_0(1 + \beta t_3)$

p_0, pression initiale ; $\beta = \alpha = \frac{1}{273}$

Evolution adiabatique (protection calorifuge parfaite).

On a $\frac{p_1}{p_3} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma}$ ou $\frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$

et $$ {}_1W_3 = \frac{p_3 V_3 - p_1 V_1}{\gamma - 1} $$

γ = 1,4 pour l'air
γ = 1,3 pour le mélange air-essence

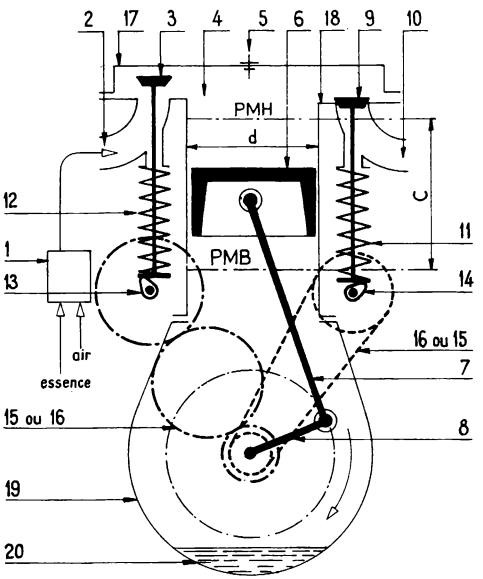
$$ \gamma = \frac{C}{c} = \frac{\text{chaleur spécifique vraie à pression constante.}}{\text{chaleur spécifique vraie à volume constant.}} $$

Fig. 4. **Evolution réelle** (comprise entre l'évolution adiabatique et l'évolution isotherme). La courbe représentative est dite polytropique. On a :

$$ pV^k = \text{Cte} $$ avec $k < \gamma$

M. 99 MOTEURS À EXPLOSIONS

①



Description organique (fig. 1).
(1) **Carburateur** : prépare le mélange combustible air-essence) ;
(2) **Tuyauterie d'admission** du mélange dans le cylindre ;
(3) **Soupape d'admission,** obture ou découvre à temps voulu l'orifice d'admission ;
(4) **Chambre de combustion** ou chambre d'explosions (espace résiduel) ;
(5) **Bougie d'allumage** électrique : enflamme le mélange ;
(6) **Piston**, (7) **Bielle**, (8) **Vilebrequin** } organes mobiles ;
(9) **Soupape d'échappement** : s'ouvre pour l'évacuation des gaz de combustion ;
(10) **Tuyauterie d'échappement ;**
(11) **Poussoir et ressort** de commande de la soupape (9) ;
(12) **Poussoir et ressort** de (3) ;
(13) **Came de commande** de (3) ;
(14) **Came** de (9) ;
(15) **Engrenages** entraînant les arbres à cames : peuvent être remplacés par une transmission par **chaîne** (16) ;
(17) **Culasse**, (18) **Cylindre**, (19) **Carter** } organes fixes ;
(20) **Réservoir d'huile de graissage.**

Définitions

d : alésage : diamètre intérieur du cylindre. d en *mm*.

P.M.H.: point mort haut: position du piston en fin de course retour (ou de compression).

P.M.B.: point mort bas: position du piston en fin de course aller (ou de détente).

C : course du piston en *mm*.

en général $1 \leqslant \frac{c}{d} \leqslant 1{,}5$

si $\frac{c}{d} = 1$, c = d, le moteur est dit « carré »

Cylindrée unitaire : V = volume engendré par le piston entre le P.M.H. et le P.M.B.

$$V = \frac{3,14\ d^2\ C}{4}$$ V en *l* ou en cm^3.

Cylindrée totale : nV (en *l* ou en cm^3). ***n*** : nombre de cylindres.
Généralement en France nV $\leqslant$ 2 *l*.

Espace nuisible v : volume compris entre le fond de la culasse et la face supérieure du piston au PMH.

Taux de compression (compression volumétrique).

$$\rho = \frac{V + v}{v}$$ en général $6 < \rho < 8$

Taux de remplissage $0{,}6 < x < 0{,}9$.

$x = \frac{V'}{V} = \frac{\text{volume réel des gaz frais admis}}{\text{volume des gaz qu'il serait possible d'admettre.}}$

x diminue si le régime N augmente.

Régime N : vitesse de rotation du vilebrequin en *tr/mn*.

Fonctions à assurer

— **Carburation** : préparation du mélange air-essence ;

— **Allumage** : production opportune et précise de l'étincelle électrique qui enflamme le mélange ;

— **Distribution** : ouverture et fermeture opportunes et précises des soupapes d'admission et d'échappement ;

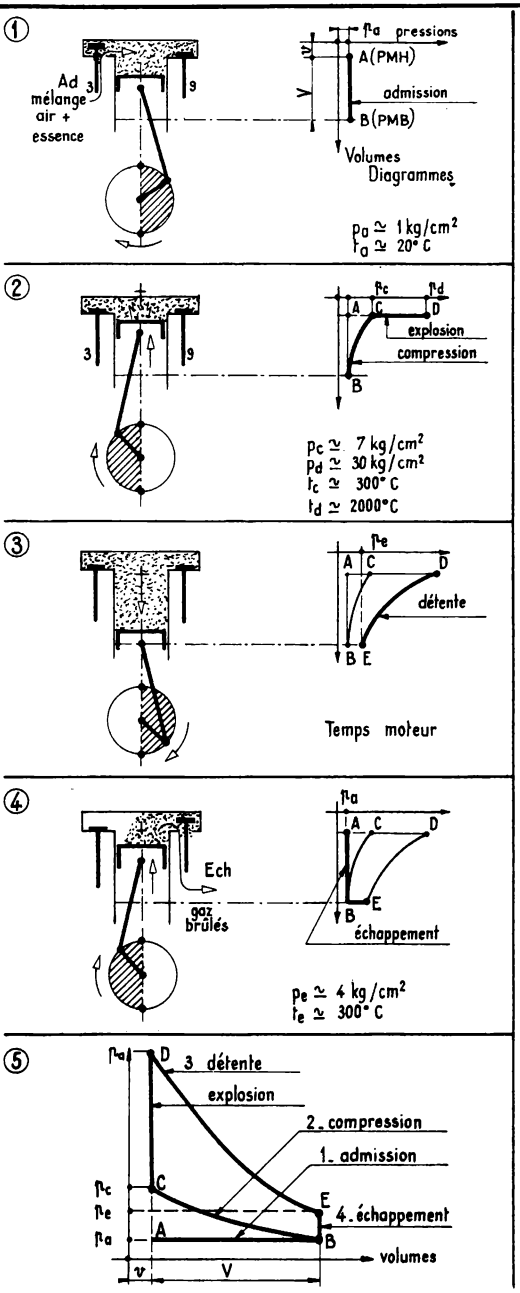
— **Graissage** : réduit l'usure et l'échauffement, évite la dilatation excessive et le grippage ;

— **Refroidissement** des organes portés à haute température par la combustion.

MOTEURS À EXPLOSIONS À 4 TEMPS (2 tours)

PRINCIPE. CYCLE THÉORIQUE

M. 100



Cycle

Ensemble des opérations à la fin desquelles les organes mobiles du moteur se retrouvent dans leur position initiale, prêts à exécuter les mêmes mouvements.

Cycle à 4 temps.

Cycle de BEAU DE ROCHAS : 1 temps moteur sur 4 temps, deux tours de vilebrequin.

Premier temps. Admission (fig. 1).

Isobare AB.

— Premier 1/2 tour du vilebrequin ;

— Soupape d'admission seule ouverte ;

— Le piston s'éloigne du P.M.H. et aspire le mélange air-essence ;

— Le volume des gaz croît de v à V + v ;

— La pression des gaz reste théoriquement constante (= p_a).

Deuxième temps. Compression (fig. 2).

Adiabatique BC.

— Deuxième demi-tour du vilebrequin ;

— Les deux soupapes sont fermées ;

— Le piston revient vers le P.M.H. en comprimant le mélange ;

— Volume des gaz frais $(V + v) \searrow v$, pression $p_a \nearrow p_c$.

L'étincelle jaillit au P.M.H., la combustion est instantanée : il y a **explosion** (isochore CD).

— Volume des gaz : ne varie pas ;

— Pression : $p_c \nearrow p_d$.

Troisième temps. Temps moteur (fig. 3).

Détente des gaz, adiabatique DE ;

— Troisième demi-tour du vilebrequin ; les soupapes sont fermées ; les gaz libérés par la combustion repoussent le piston vers le P.M.B.

$v \nearrow (v + V)$, $p_d \searrow p_e$.

Quatrième temps. Échappement (fig. 4).

Isochore EB et isobare BA.

— Quatrième demi-tour du vilebrequin ;

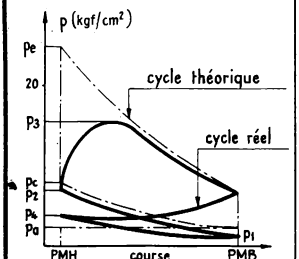
— Soupape d'échappement ouverte $p_e \searrow p_a$, le piston revient vers le P.M.H. en expulsant les gaz brûlés.

Fig. 5 : **Diagramme théorique complet, redressé.**

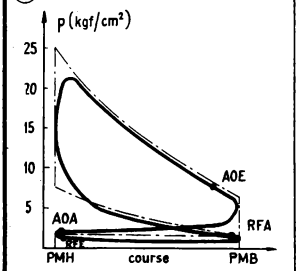
MOTEURS À EXPLOSIONS À 4 TEMPS

FONCTIONNEMENT RÉEL

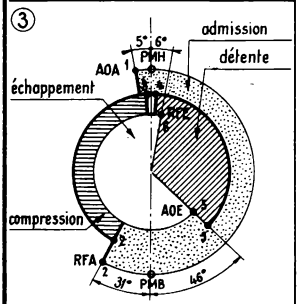
①



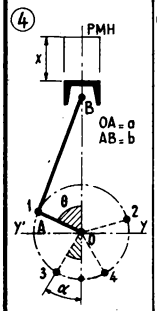
②



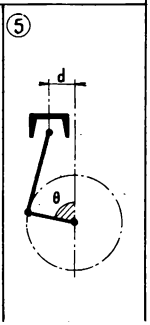
③



④



⑤



Cycle à 4 temps sans réglage préalable (fig. 1).

Les soupapes s'ouvrent et se ferment lorsque le piston passe au PMH ou au PMB.

Défauts constatés.

— **Remplissage insuffisant,** $p_1 < p_a$ (pression atmosphérique)

— **Compression insuffisante,** $p_2 < p_c$

— **Pression d'explosion trop faible,** $p_3 < p_e$

— **Echappement incomplet** (contre-pression), $p_4 > p_a$

Le diagramme réel diffère nettement du diagramme théorique ;

Surface utile : plus petite, puissance diminuée ;

Rendement : très mauvais.

Causes.

— **Écoulement défectueux des gaz** : lent et difficile (coudes, soupapes).

— **Inflammation non instantanée** (durée t) des gaz frais, en général $t \leqslant 0{,}001$ *s*

— **Compression et détente non adiabatiques** (voir M. 98).

— **Vitesse v du piston assez grande.**

Exemple : N = 3 000 *tr/mn*, course C = 100 *mm* ; v_{moy} = 16 *m/s*. Si t = 0,001 *s*, le piston a parcouru 16 *mm* pendant la combustion des gaz.

Cycle réel après réglage de la distribution et de l'allumage.

On cherche à rapprocher le plus possible la courbe réelle du diagramme théorique (fig. 2).

Avance à l'ouverture de l'admission (AOA) (moteurs rapides)

Pour les moteurs lents il faut un retard (ROA).

Retard à la fermeture de l'admission (RFA)

RFA et AOA améliorent le remplissage des cylindres.

Avance à l'allumage (AA).

Afin que le piston ne soit pas trop éloigné du PMH au début de la détente des gaz.

— **Avance initiale** : Réglage fixe qui dépend surtout du taux de compression et de la qualité du carburant.

— **Avance variable** : Réglage variable suivant le régime N du moteur, à partir de l'avance initiale.

Avance à l'ouverture de l'échappement (AOE)

Diminution de la contre-pression (travail résistant plus faible).

Retard à la fermeture de l'échappement (RFE).

Evacuation plus complète des gaz brûlés.

Réglage linéaire X (*mm*).

Avances et retards évalués en portions de course du piston par rapport au PMH.

Réglage angulaire θ ou α (degrés).

Positions angulaires θ ou α du vilebrequin ou du volant par rapport à la position du PMH ou du PMB.

Epure circulaire (fig. 3) Angles θ de réglage réunis sur un même tracé.

Relations entre x et θ.

Moteurs non désaxés (fig. 4).

$$x = a + b \mp a\cos\theta - \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$$

— a cosθ pour 1 (ou 2) au-dessus de y'y,
+ a cosθ pour 3 (ou 4) au-dessous de y'y.
(Remplacer θ par α).

Moteurs désaxés (fig. 5).

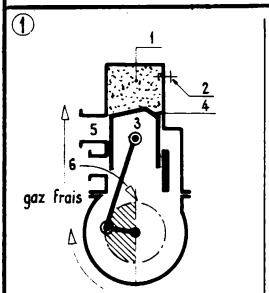
$$x = \sqrt{(a+b)^2 - d^2} \mp a\cos\theta - \sqrt{b^2 - (a\sin\theta - d)^2}$$

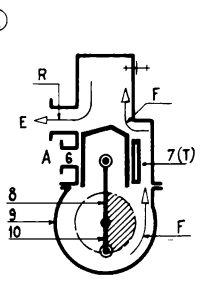
Si d = 0, on retrouve la première formule.

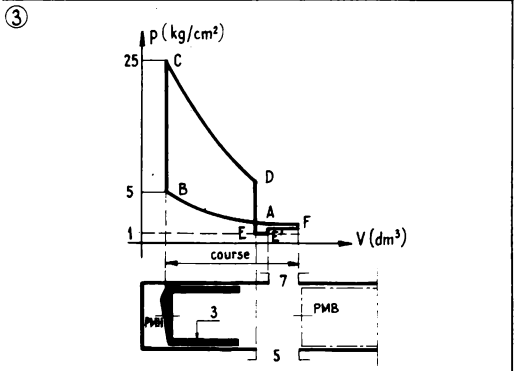
MOTEURS À DEUX TEMPS (1 tour)

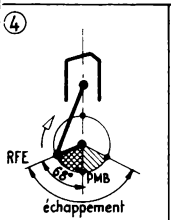
PRINCIPE

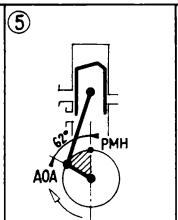
M. 102

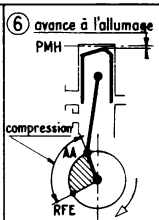


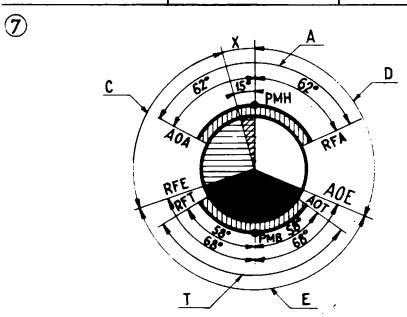












Définition.

Moteurs dont le cycle de fonctionnement s'accomplit pendant un tour du vilebrequin.

Moteurs de faible puissance, en général monocylindriques.

Description (fig. 1 et 2). ***(moteur à trois lumières).***

(1) Cylindre ; (2) Bougie ; (3) Piston avec déflecteur (4) ; (5) Lumière d'échappement ; (6) Lumière d'admission dans le carter ; (7) Canal et lumière de transfert ; (8) Bielle ; (9) Carter ; (10) Vilebrequin ; F = gaz frais ; R = gaz résiduels ou brûlés.

Cycle. Diagramme théorique (fig. 3).

Premier temps (fig. 1).

Le piston remonte : **compression** des gaz frais dans le cylindre (courbe AB), puis **admission** dans le carter en fin de course. L'étincelle éclate au P.M.H. dans le cylindre : (droite BC) **explosion.**

Deuxième temps. **Temps moteur** (fig. 2).

Le piston descend.

Détente des gaz (courbe CD), le piston démasque l'orifice d'échappement ($p \searrow p_a \simeq 1$ *kgf/cm²*) (droite DE), puis l'orifice de transfert; les gaz frais expulsés du carter pénètrent dans le cylindre par le canal de **transfert** $p \simeq 1{,}5$ à 2 *kgf/cm²* (droite E'A) et expulsent les gaz brûlés ($p \simeq$ constante) pendant l'ouverture des lumières 5 et 7 (droite AF).

La compression recommence lorsque le piston remonte, les lumières 5 et 7 sont fermées.

Epure circulaire (voir M 101) et (fig. 4, 5, 6 et 7).

C = compression, X explosion, D détente, E échappement, A admission dans le carter.

Fig. 7 : Epure de moteur VILLIERS.

Diagramme pratique (fig. 4, M 104).

Tient compte de :

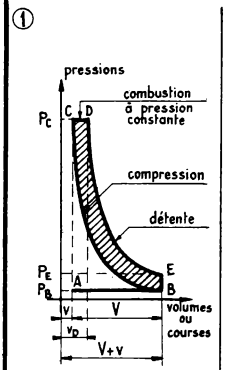
(AA) avance à l'allumage ; (AO) avance ouvertures (A, T et E) ; (RF) retard fermetures, (A, T et E) ; réglage définitif sauf pour (AA).

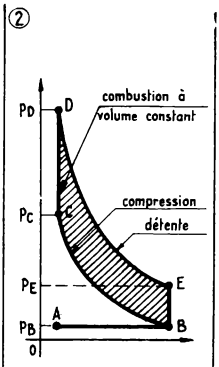
T_m = travail moteur ;

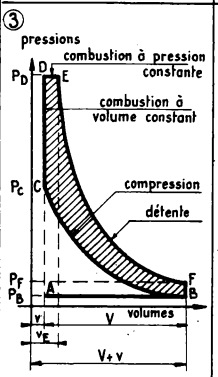
T_r = travail résistant (compression dans le carter).

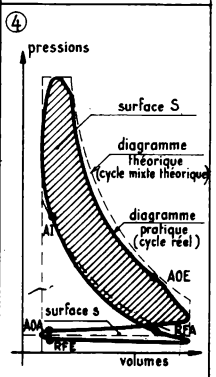
M. 103 — MOTEURS DU TYPE " DIESEL " (I)

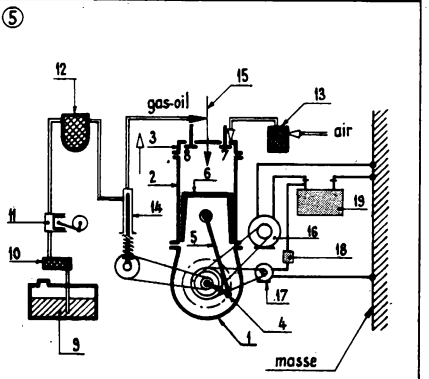
PRINCIPE — CYCLES THÉORIQUES











Moteur du type DIESEL ou moteur à combustion.

Moteur fonctionnant avec un combustible liquide pulvérisé : gas-oil ou huile spéciale qui s'enflamme et brûle au contact d'air chaud.

Autres désignations :
— Moteurs à allumage par compression ;
— Moteurs à carburation interne ;
— Moteurs à injection de gas-oil.

Cycle. A deux tours (quatre temps) ou à un tour (deux temps).

Principe fondamental.

Les fines gouttelettes de gas-oil que l'on met en contact avec de l'air fortement comprimé, donc très chaud (500 °C environ), s'enflamment spontanément.

Fonctions à assurer.

— **Distribution.** Règle le mouvement des soupapes d'admission (de l'air dans les cylindres) et d'échappement (des gaz de combustion).
— **Alimentation** du moteur en combustible (gas-oil).
— **Injection** du combustible dans les cylindres **(injection mécanique dite solid-injection).**
— **Refroidissement.**
— **Graissage.**
— **Démarrage ou lancement** : à la **manivelle** (démarreur à inertie), avec un **démarreur** électrique (petit moteur électrique alimenté par une batterie de 24 *V*), à l'aide **d'air comprimé** introduit dans les cylindres par une soupape **(soupape de lancement).**

Principaux organes.

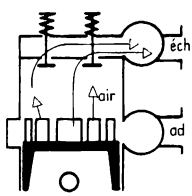
Fig. 5. Schéma de fonctionnement :
— **Organes fixes** : (1) Carter ; (2) Cylindre ; (3) Culasse et sa chambre de combustion particulière.
— **Organes mobiles** : (4) Vilebrequin ; (5) Bielle ; (6) Piston.
— **Organes de distribution** : (7) soupape d'admission d'air ; (8) soupapes d'échappement, arbres à cames.
— **Organes d'alimentation** : (9) Réservoir de gas-oil ; (10) Préfiltre ; (11) Pompe ; (12) Filtre de gas-oil ; (13) Filtre d'air.
— **Organes d'injection** : (14) Pompe d'injection ; (15) injecteur.
— **Autres organes** : (16) Démarreur ; (17) Dynamo ; (18) Régulateur ; (19) Batterie.

MOTEURS DU TYPE DIESEL (2)

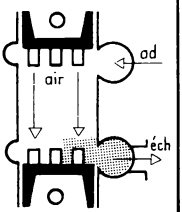
CYCLES — MOTEURS FIXES

M. 104

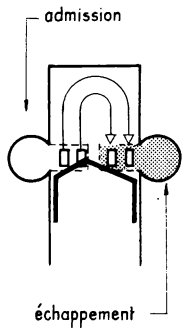
①



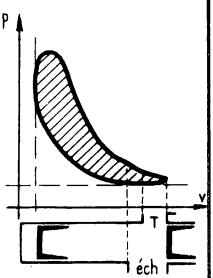
②



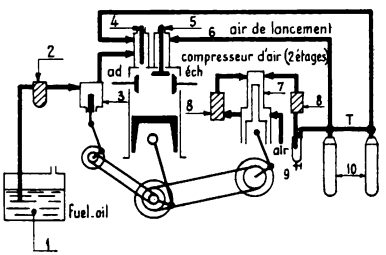
③



④



⑤



Moteurs fixes (moteurs lents) (fig. 5)

(1) Réservoir de fuel-oil ; (2) Filtre ; (3) Pompe d'alimentation ; (4) Pulvérisateur à air comprimé ; (5) Soupape de lancement ; (8) Réfrigérant ; (9) Purge ; (10) Réservoirs d'air comprimé.

Cycles théoriques à 4 temps.

Cycle à pression constante (fig. 1, M. 103).

AB **aspiration** d'air pur, BC **compression** de cet air, C **injection** de gas-oil, CD **combustion** : la pression reste constante alors que le volume des gaz croît de v à v_D, DE **détente** des gaz de combustion (temps moteur), EB et BA **échappement.**

Cycle des gros **moteurs Diesel fixes (moteurs lents).**

Cycle à volume constant (fig. 2, M. 103).

AB **aspiration** d'air pur, BC **compression,** C **injection,** CD **combustion** : le volume des gaz reste constant alors que la pression croît de p_e à p_D, DE **détente,** EAB **échappement.**

Cycle analogue au cycle de BEAU DE ROCHAS (M. 100).

Cycle mixte (fig. 3, M. 103).

La combustion s'effectue à volume constant et à pression constante.

Cycle des **moteurs Diesel rapides.**

Cycle réel à 4 temps.

- La compression et la détente ne sont pas adiabatiques.
- Le remplissage des cylindres n'est pas complet.
- L'injection n'est pas instantanée et n'a pas lieu exactement au moment voulu.
- Pression et volume des gaz varient simultanément (dans la région du PMH).
- Les gaz brûlés ne s'échappent pas assez vite.

Le diagramme réel s'éloignerait beaucoup trop du diagramme théorique (défauts ci-dessus) si l'on ne faisait pas les réglages suivants :

- AOA, RFA et AOE, RFE (voir M. 101).
- AI (avance à l'injection).

Fig. 4. (M 103) Diagramme réel obtenu avec des réglages convenables.

L'AI se règle initialement sur la pompe d'injection et se modifie en fonction de la vitesse de rotation du moteur automatiquement ou à la main.

Cycle théorique à 2 temps.

- Au PMH, il est analogue au cycle DIESEL 4 temps.
- Au PMB, il est analogue au cycle d'un moteur à 2 temps à essence (M. 102, fig. 3).

Cycle réel à 2 temps (fig. 4).

- **Balayage :** Les gaz brûlés sont expulsés du cylindre par l'air de combustion.
- **Pompe de balayage :** Petit compresseur alternatif ou rotatif qui alimente les cylindres en air.

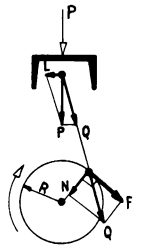
Fig. 1. Balayage à équicourant (sens unique) ascendant.

Fig. 2. Balayage à équicourant descendant (deux pistons opposés).

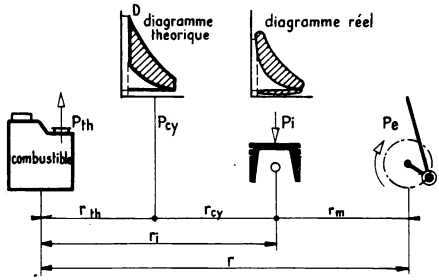
Fig. 3. Balayage à courant infléchi ou inversé.

M. 105 — COUPLE MOTEUR — PUISSANCE

①

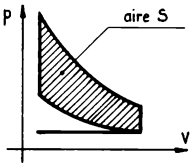


②



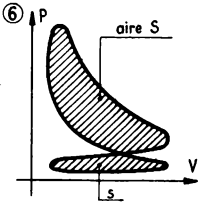
③ $P_{th} = \frac{M.C}{176\ t}$

④



⑤ $P_{cy} = n.W_{cy}\ \frac{N}{60x} \cdot \frac{1}{75}$

⑥



⑦ $P_i = n.W_i \cdot \frac{N}{60x} \cdot \frac{1}{75}$

⑧ $P_e = \frac{C.N}{716}$

⑨ $C = F.R$

Puissance.

Puissance théorique P_{th} : puissance relative au combustible brûlé en **t** secondes par le moteur. Formule 3.

P_{th} en *ch*, M = masse (en *g*) de combustible brûlé en **t** (*s*); M = V.ϱ.

V = volume du combustible en cm^3; ϱ = masse volumique du combustible en g/cm^3.

C = pouvoir calorifique inférieur du combustible en calories-grammes

Exemple :

Une voiture a consommé 8 *l* d'essence en 1 heure. ϱ = 0,72 g/cm^3.

C = 11 000 *cal/g*. Nous avons $P_{th} = \frac{8\,000 \times 0{,}72 \times 11\,000}{176 \times 3\,600} \simeq$ **100** (*ch*)

Puissance du cycle. P_{cy} Puissance relative au cycle théorique du moteur ou puissance que le moteur fournirait s'il fonctionnait exactement suivant le cycle théorique prévu. Formule 5

P_{cy} en *ch*, W_{cy} = travail correspondant en (*kgm*) à un cycle théorique (fig. 4). W_{cy} = K.S, K = $k_p \times k_v$.

S = surface évaluée ou mesurée du diagramme, k_p = échelle sur l'axe des pressions (p en kg/m^2), k_v = échelle sur l'axe des volumes (V en m^3).

n = nombre de cylindres, N = régime du moteur en *tr/mn*.

x = durée d'un cycle en tours de vilebrequin : moteurs à quatre temps x = 2; moteurs à deux temps x = 1.

Exemple :

W_{cy} = 36 *kgm*, n = 4, N = 3 000 *tr/mn*, x = 2. P_{cy} = **48** (*ch*)

Puissance indiquée P_i **:**

Puissance (en *ch*) développée sur les pistons par les gaz de combustion. Formule 7.

Wi = travail correspondant à un cycle réel pour un cylindre (en *kgm*)

Wi = K (S — s). pour S et s : voir fig. 6.

Exemple : Wi = 27 *kgm*, n = 4, N = 3 000 *tr/mn*, x = 2. P_i = **36** *ch*

Puissance effective du moteur P_e**.**

Puissance fournie par le moteur en bout du vilebrequin. Formule 8.

$P_i - P_e$ = puissance nécessaire pour vaincre les frottements et entraîner les organes auxiliaires : allumeur, pompes, génératrice...

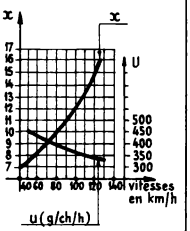
C = **couple moteur** : en *m.kgf* (mesuré au banc d'essai). F = effort tangentiel, R = rayon de manivelle (vilebrequin), voir (fig. 1) et formule 9

Exemple : C = 6,2 *m.kgf* On a $P_e = \frac{6{,}2 \times 3\,000}{716} \simeq$ **28** *ch*

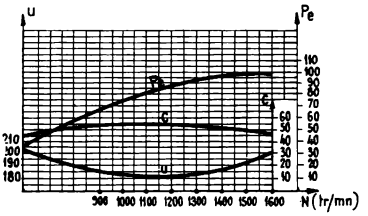
RENDEMENTS — COURBES CARACTÉRISTIQUES
CONSOMMATION

M. 106

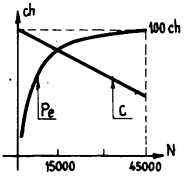
① Renault (Frégate)



②



③



$P_f = kn\ D^2\ C\ K$

$k = 0{,}00020$ pour $n = 1$

$k = 0{,}00017$ " $n = 2$

$k = 0{,}00015$ " $n \geqslant 4$

$r_{th} = \frac{P_{cy}}{P_{th}}$ $\quad r_{cy} = \frac{P_i}{P_{cy}}$

$r_i = \frac{P_i}{P_{th}}$ $\quad r_i = r_{th} \times r_{cy}$

$r_m = \frac{P_e}{P_i}$ $\quad r = \frac{P_e}{P_{th}}$

$r_t = \frac{P}{P_e}$ $\quad r' = \frac{P}{P_{th}}$

$Pi = \frac{1}{10} \cdot \frac{W_i}{V}$

$Pe = \frac{1}{10} \frac{W_e}{V}$

$W_e = 2\pi C = 2\pi FR$

$x = \frac{100\,X}{L}$

$\omega = \frac{P_e}{nV}$

$q = \frac{P_e}{M} = \frac{1}{m}$

$m = \frac{M}{P_e} = \frac{1}{q}$

$\gamma = \frac{C}{nV}$

$u = \frac{Q}{P_e}$

Puissance effective P sur les roues motrices.

Mesurée au banc d'essai ou sur route, voir Technor « automobile ».
P_e — P = puissance absorbée par la transmission (frottements).

Puissance fiscale P_t :

Puissance conventionnelle servant à désigner administrativement un véhicule (carte grise, impôts, assurances).

Déterminée par une formule empirique : n = nombre de cylindres, D = alésage en *cm*, C = course en *cm*, K coefficient suivant poids P (châssis nu).

($P \leqslant 1\,250$ *kg*, K = 30), ($1\,250 < P < 2\,250$, K = 25), ($P \geqslant 2\,250$, K = 10).

Exemple : PEUGEOT 203, n = 4, D = 7,5 *cm*, C = 7,3 *cm*, P_t = 7 *ch*.

Rendement (fig. 2, M. 105).

r_{th} = rendement thermique théorique, r_i = rendement thermique indiqué.

r_{cy} = rendement du cycle ; r_m = rendement mécanique, r_t = rendement de la transmission.

r = rendement global du moteur, r' = rendement global du véhicule.

$$r = r_i \times r_m = r_{th} \times r_{cy} \times r_m$$
$$r' = r \times r_t = r_{th} \times r_{cy} \times r_m \times r_t$$

Exemple : données et résultats de M. 105.

$r_{th} = 48 : 100 = \mathbf{0{,}48}$, $r_{cy} = 36 : 48 = \mathbf{0{,}75}$, $r_m = 28 : 36 \simeq \mathbf{0{,}77}$.

$r = 28 : 100 = \mathbf{0{,}28}$ ou encore $r \simeq 0{,}48 \times 0{,}75 \times 0{,}77 \simeq 0{,}28$.

Pressions.

— Pression moyenne indiquée p_i *(kgp/cm²)*

Pression constante qui, agissant sur le piston pendant la détente produirait un travail égal à W_i (pour un cylindre).

— Pression moyenne efficace p_e *(kgp/cm²)*

Pression fictive constante qui agissant sur le piston produirait un travail égal à W_e (pour un cylindre) W_i et W_e en *kgm*, V = cylindrée unitaire en dm^3.

Consommation *(kilométrique)* (fig. 1).

Quantité x (*l* ou dm^3) de combustible (ou d'huile de graissage) consommée au 100 *km*.

X = quantité totale consommée sur un parcours de L *km*.

Eléments de comparaison des moteurs entre eux.

Puissance spécifique ω *(ch/l)* **Masse puissancique m** *(kg/ch)*
Puissance massique q *(ch/kg)* **Couple spécifique** γ *(m.kg/l)*

P_e = puissance effective du moteur. V = cylindrée unitaire en *l*,
n = nb de cylindres. M = masse du moteur en *kg*.
C = couple moteur en *m.kgf* Q = consommation horaire (en *g*).

Consommation spécifique :

Quantité u (en *g*) de combustible (ou d'huile de graissage) consommée par cheval et par heure. $u \simeq 200$ *g/ch/h* (DIESEL), 250 *g/ch/h* (moteurs à essence).

Courbes caractéristiques.

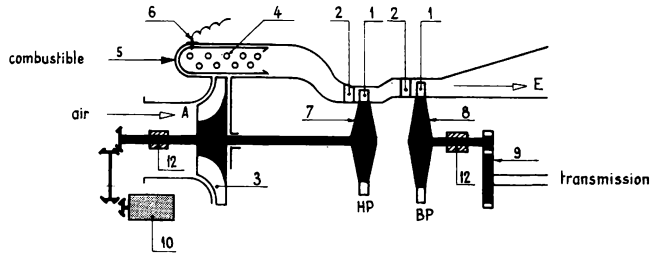
Représentent la variation de P_e, C et u en fonction du régime N du moteur. On les détermine au banc d'essai.

Fig. 2 : courbes d'un moteur à pistons ; fig. 3 : courbes d'un moteur à turbine.

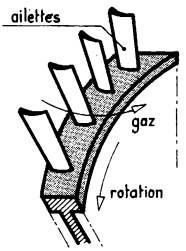
MOTEURS À TURBINES

TURBINES À GAZ

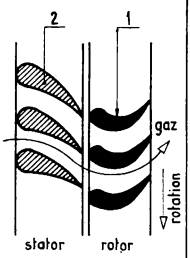
①



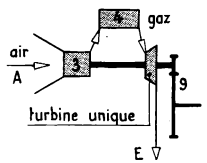
②



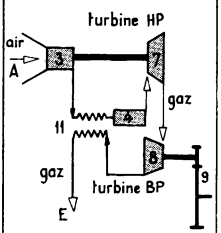
③



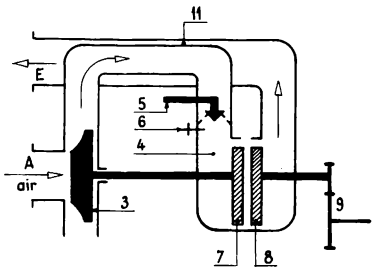
④



⑤



⑥



Turbine à gaz.

Machine motrice dans laquelle l'énergie cinétique des gaz de combustion agit sur les ailettes d'une roue appelée ***rotor*** ou turbine (organe mobile).

Stator, diffuseur ou distributeur. Organe fixe dont les ailettes canalisent les gaz de combustion avant leur passage sur le rotor.

Turbine à étages. Ensemble comprenant plusieurs stators et plusieurs rotors calés sur le même arbre.

Moteurs à turbines (fig. 1, 4, 5, 6).

(1) Ailettes mobiles ou aubes (rotor) ; (2) Ailettes fixes (stator) ; (3) **Compresseur d'air centrifuge** : alimente les chambres de combustion (4) ; (5) **Injecteur** de combustible (kérosène, gas-oil) ; (6) **Bougie d'allumage** (démarrage seulement) ; (7) **Turbine H.P.** (haute pression) entraîne (3) ; **Turbine B.P.** (basse pression) (ou deuxième étage) ; turbine de puissance entraîne le véhicule ; (9) **Réducteur ;** (10) **Démarreur,** A admission d'air, E échappement des gaz brûlés ; (11) **Échangeur** de chaleur ou récupérateur ; (12) **Limiteur de vitesse.**

Fig. 4. Turbine à un arbre ;
Fig. 5. Turbine à deux arbres.

Échangeur (ou **récupérateur**).

Réchauffe l'air d'admission au moyen des gaz d'échappement. Augmentation du rendement : 20 % (voir M 97 et M 106).

Fluage.

Phénomène de déformation des aubes à haute température (900 °C environ) sous l'effet de la force centrifuge.

Métaux utilisés. Titane, zirconium, aciers au chrome silicium molybdène, alliages réfractaires au nickel-chrome.

Avantages et inconvénients.

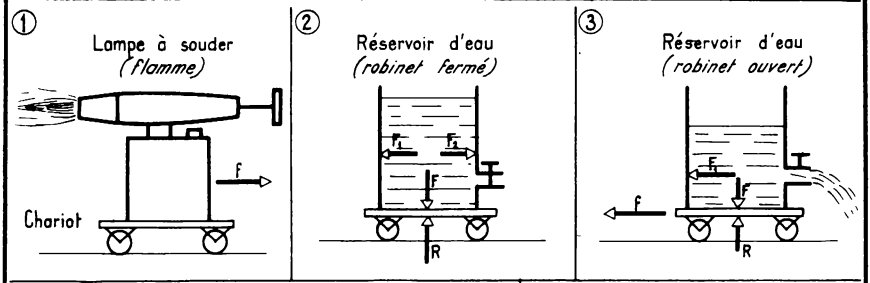
Faible consommation d'huile, encombrement et poids réduits, bon équilibrage, départ facile, couple maximum au démarrage, bonnes accélérations.

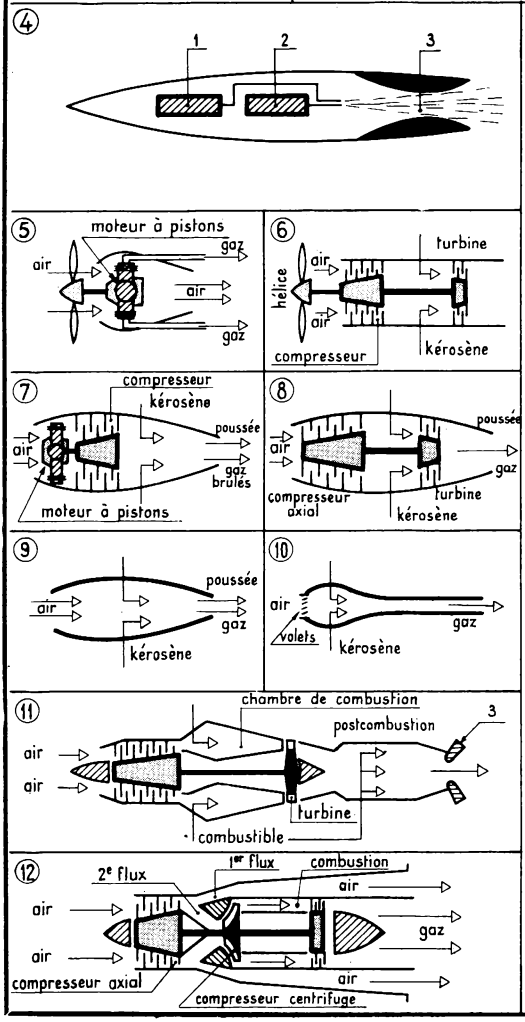
Consommation élevée de combustible, matériaux coûteux, réducteur important, bruit (sifflement).

TURBINES À GAZ

MOTEURS A RÉACTION

M. 108





Propulsion par réaction.

Fig. 1. Le chariot avance dans le sens inverse de celui de la flamme.

Fig. 2. Le chariot est immobile F_1 et F_2, F et R s'équilibrent)

Fig. 3. F_1 fait avancer le chariot (sens f).

Types de moteurs.

Fig. 4. **Fusée :** (1) comburant (air liquide, eau oxygénée), (2) combustible (alcool, bioxyde d'hydrogène, acide nitrique, hydrate d'hydrazine...), (3) tuyère.

Fig. 5. **Motopropulseur.** Double effet réactif (gaz d'échappement, air de refroidissement).

Fig. 6. **Turbopropulseur.** La turbine actionne le compresseur (axial ou centrifuge) et une hélice (ou une transmission).

Fig. 7. **Motoréacteur** Réaction des gaz de combustion, compresseur entraîné par un moteur à pistons.

Fig. 8. **Turboréacteur.** Compresseur entraîné par une turbine.

Fig. 9. **Statoréacteur.** Aucun organe rotatif, l'air est comprimé par le déplacement du moteur (nécessité du lancement au départ).

Fig. 10. **Pulsoréacteur.** Entrée d'air réglée par volets, longue tuyère.

Fig. 11. **Turboréacteur à postcombustion.**

Fig. 12. **Turboréacteur à double flux.**

Poussée des gaz en *kgf* :

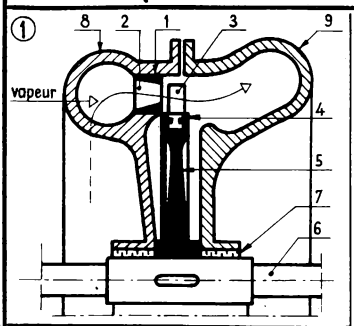
$$F = \frac{P}{g}(v_2 - v_1)$$

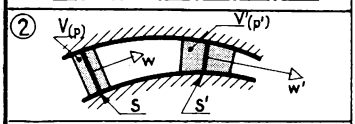
Puissance de propulsion (en *ch*) :

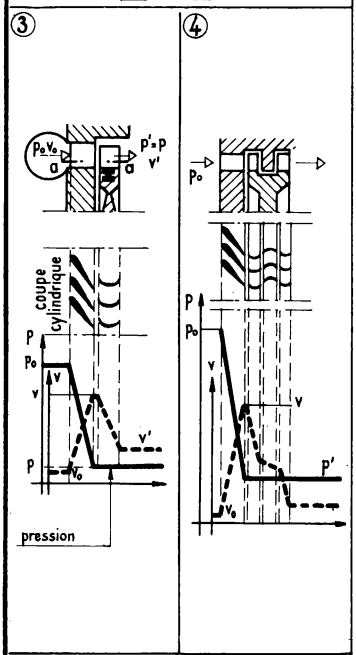
$$\mathcal{P} = F \cdot v_1 = \frac{P(v_2 - v_1)v_1}{75\ g}$$

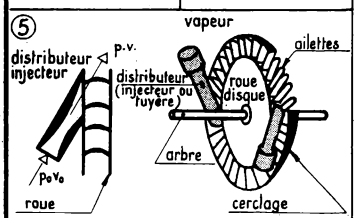
P = poids d'air absorbé en 1 *s*.
g = accél. de la pesant. $\simeq$ 9,81.
v_1 = vitesse d'entrée de l'air (vitesse de l'avion).
v_2 = vitesse de sortie des gaz.

TURBINES À VAPEUR (I)









Description - Principe (fig. 1)

(1) Distributeur fixe : une ou plusieurs tuyères (2) ou des ailettes fixes; (4) Roue ou rotor; (3) Ailettes ou aubes mobiles fixées sur (4); (5) Disque de (4); (6) Arbre moteur; (7) Labyrinthe d'étanchéité; (8) Tore d'admission; (9) Tore d'évacuation.

L'énergie thermique enfermée dans la vapeur d'eau (énergie interne et énergie de pression)

$$\frac{p}{\varpi} = \frac{\text{pression}}{\text{poids spécifique}}$$

est transformée en énergie cinétique dans le distributeur (très grande vitesse de la vapeur à la sortie des tuyères) et en énergie mécanique sur la roue.

Écoulement de vapeur en tuyère (fig. 2).

Variation de section S → S', variation de volume V → V' d'une même masse de vapeur, w et w' vitesse d'écoulement de la vapeur en S et S'; p et p' pressions (fluide compressible). Pour l'unité de masse :

$$pV - p'V' = \frac{w'^2}{2} - \frac{w^2}{2} + A_c$$

A_c = travail de compression ($A_c > 0$) ou de détente ($A_c < 0$) de la vapeur.

En tuyère convergente : $w' > w$ et $p' < p$ (fig. 3).

Triangles des vitesses (fig. 2, M. 111).

A l'entrée et à la sortie de la roue : voir M. 111 (fig. 2). $\vec{w}$ est tangente à la paroi de l'ailette (pour éviter les chocs). $\vec{v'}$ doit être aussi faible que possible (pour diminuer le plus possible la perte d'énergie cinétique). Il faut donc $\widehat{\beta'}$ aussi petit que possible.

Travail et puissance.

$$A = \frac{w'^2 - w^2}{2} + \frac{v^2 - v'^2}{2} \qquad \boxed{P = Q \cdot A}$$

A = Travail fourni par l'unité de masse de vapeur.
P = Puissance de la turbine :
Q = masse de vapeur débitée par seconde.

Turbines à action (ou à impulsion).

Section de passage S entre deux ailettes de la roue = constante. Pas de variation de pression : $p = p' = C^{te}$.

Puisque $V = V'$ nous avons $|w'| = |w|$ et $A_c = 0$ (ni détente, ni compression). On prend en outre $\beta = \beta'$ très petits de telle sorte que $v' \simeq 0$ (u) et w' sensiblement égales et opposées) soit $|u| = |w'| = |w|$ et $\boxed{|v| = 2\,|u|}$ (rendement maximum).

Turbines à réaction. (ou à veine forcée).

— Diminution de la section de passage S entre deux ailettes de la roue.

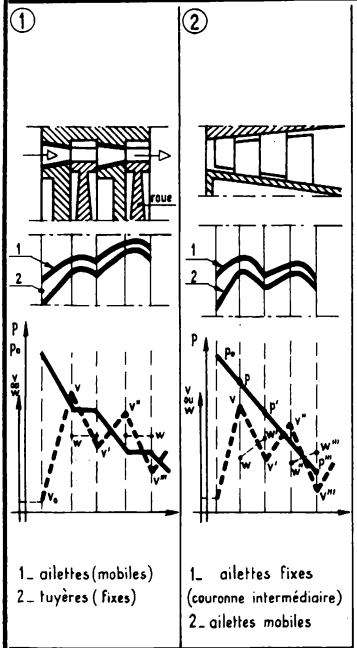
— Détente : $p' < p$, augment. de vitesse : $w' > w$.

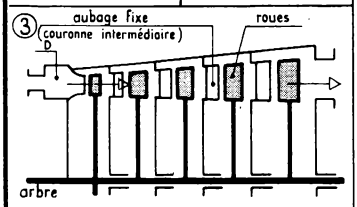
La détente de la vapeur commence dans le distributeur $p < p_0$, (pression vapeur à l'entrée du distributeur).

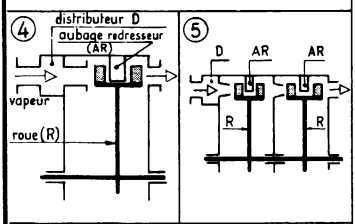
Degré de réaction $\boxed{r = \dfrac{v_2^2 - v^2}{v_1^2}}$ v_1 = vitesse qui correspondrait à la détente totale p_0 à p'. (En général $r \simeq 0{,}5$.)

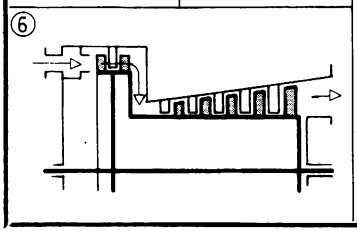
On prend encore $|u| \simeq |w'|$ et $\widehat{\beta'}$ très petit. Ce qui entraîne $\boxed{|v| = |u|}$. On est limité par la résistance des ailettes (force centrifuge).

TURBINES À VAPEUR (2)









Turbines à étages.

Caractères particuliers de la vapeur :

— fluide compressible pouvant subir des variations considérables de volume et de vitesse d'écoulement.

Exemple pour une tuyère :

Entrée : $p_0 = 12\ kgp/cm^2$, $v_0 = 10\ m/s$.
Sortie : $p = 4\ kgp/cm^2$, $v \simeq 1\,200\ m/s$.

Conséquences : impossibilité d'utiliser en une seule transformation (comme pour l'eau dans les turbines hydrauliques) l'énergie cinétique de la vapeur : vitesses de rotation trop élevées, force centrifuge trop grande.

On ramène u à une valeur acceptable en utilisant des turbines à étages.

— *étages de vitesses* (CURTIS).

L'énergie cinétique de la vapeur n'est que partiellement utilisée sur une première roue (u réduite) puis sur une deuxième, une troisième... **Toutes les roues sont à action** et solidaires d'un même arbre.

Entre deux roues, le flux de vapeur est simplement redressé par des **aubages redresseurs (ou inverseurs)** fixes AR (section de passage constante, pas de détente) (fig. 4, voir aussi M. 109, fig. 3 et 4) (la vitesse diminue un peu dans le redresseur en raison des frottements). La détente totale s'effectue uniquement dans le distributeur. La vitesse de la vapeur v diminue sur chaque roue.

1 Etage de vitesse = ensemble d'une roue et d'un redresseur.

— *étages de pressions.*

La diminution totale de pression (détente totale) s'effectue en plusieurs fois dans plusieurs couronnes intermédiaires fixes à tuyères convergentes qui redressent également le flux de vapeur.

Les roues peuvent être :

Fig. 1 et 3 : à action (RATEAU).

Fig. 2 : à réaction (PARSONS).

— *étages mixtes* (étages de vitesses + étages de pressions).

Fig. 5. Turbine à deux étages de pressions comprenant chacun deux étages de vitesses.

Fig. 6. Deux étages de vitesses (en tête) suivis de plusieurs étages de pressions.

Turbines à double rotation.

Les aubages redresseurs sont mobiles et tournent en sens inverse de celui des roues. Les arbres des roues et des redresseurs sont distincts. La vitesse angulaire des roues est deux fois plus petite.

Principaux types.

Turbine CURTIS : deux étages de vitesses (fig. 4) (voir M. 109, fig. 4).

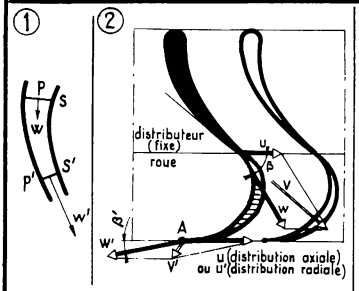
Turbine RATEAU : étages de pressions, roues à action (fig. 1 et 3).

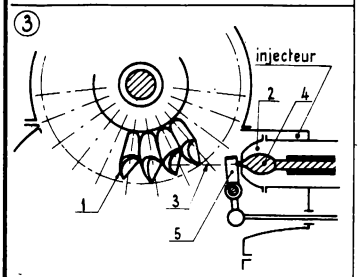
Turbine PARSONS : étages de pressions, roues à réaction (fig. 2).

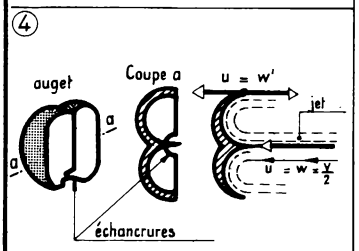
Turbine BROWN-BOVERI : roue CURTIS en tête suivie par des éléments PARSONS (fig. 6).

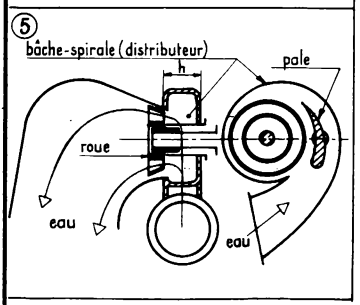
Turbine DE LAVAL : à action, une seule roue, deux, trois ou quatre tuyères ou injecteurs (distributeur) (fig. 5, M. 109).

TURBINES HYDRAULIQUES (I)









Principe.

Un courant d'eau convenablement orienté par les ailettes (ou les tuyères) d'un **distributeur** agit sur les ailettes d'une roue ou **rotor.**

L'eau est incompressible : elle ne subit pas de variation de volume lorsque la pression varie.

Écoulement de l'eau dans une tuyère (fig. 1, voir aussi M. 109).

p et p' = pression de l'eau en un point des sections S et S';

w et w' = vitesse de l'eau en ce même point;

ρ = masse spécifique (ou volumique) de l'eau.

$$\frac{1}{\rho}(p - p') = \frac{1}{2}(w'^2 - w^2).$$

Triangles des vitesses.

A l'entrée de la roue : $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$.

A la sortie de la roue : $\vec{v'} = \vec{u} + \vec{w'}$.

$\vec{u}$ = vitesse d'entraînement (vitesse de la roue).

$\vec{w}$ = vitesse relative de l'eau (par rapport à l'ailette de la roue).

$\vec{v}$ = vitesse absolue de l'eau (par rapport au distributeur fixe).

Travail fourni par une turbine (W) **(pour l'unité de masse)**

$$W_a = \frac{v^2 - v'^2}{2} \qquad W_r = \frac{w'^2 - w^2}{2} + \frac{v^2 - v'^2}{2}.$$

Turbine à action W_a.

Section de passage de l'eau entre les ailettes de la roue = constante : w = w' et p = p'.

Turbine à réaction W_r.

La section de passage diminue : w' > w et p > p'

Puissance théorique (P).

ρ = masse volumique de l'eau

Q = débit de la turbine en m^3/s.

$$P = \rho \cdot Q \cdot W.$$

Vitesse spécifique d'une turbine (n_s *tr/mn*).

Nombre de tours n_s que doit faire la turbine en une minute pour fournir une puissance de 1 *ch* sous 1 *m* de chute nette avec le meilleur rendement.

$$n_s = \frac{N}{h_n}\sqrt{\frac{P_e}{\sqrt{h_n}}}.$$

N = vit. de la turbine en *tr/mn*.
h_n = haut. de chute nette (*m*).
P_e = puissance effective (sur l'arbre en *ch*).

Rendement. P_h = **puissance hydraulique** (en *ch*).

$$\eta = \eta_v \cdot \eta_m \cdot \eta_o. \qquad P_h = \frac{1\,000 \cdot Q_1 \cdot \varpi \cdot h_n}{75}$$

η = rendement global.
η_v = rendement volumétrique (= P'/P_h).
η_m = rendement manométrique (= P/P').
η_o = rendement organique ou mécanique (= P_e/P).
Q_1 = débit de la chute en m^3/s.
ϖ = poids volumique (ou spécifique) en kgf/dm^3.
h_n = h — x et h = hauteur de chute réelle ou géométrique.
x = pertes de charge (en *m*), (voir M. 116).

P_h — P' = perte de puissance due aux fuites d'eau entre roue et distributeur.
P' — P = perte due à un écoulement imparfait entre les ailettes de la roue.
P — P_e = perte due aux frottements des organes mobiles.

Remarque. — Faible débit et grande hauteur de chute ou gros débit et petite hauteur donnent la même puissance.

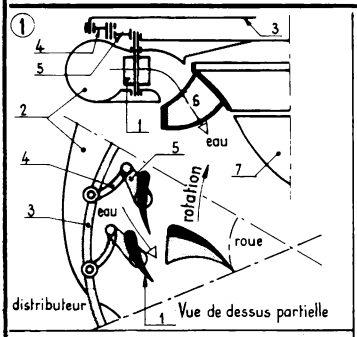
Vitesse de l'eau à l'entrée du distributeur : $v = \sqrt{2gh_n}$

TURBINES HYDRAULIQUES (2)

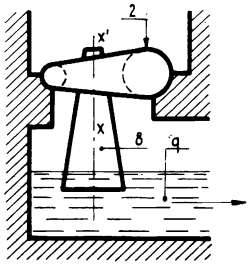
PRINCIPAUX TYPES

M. 112

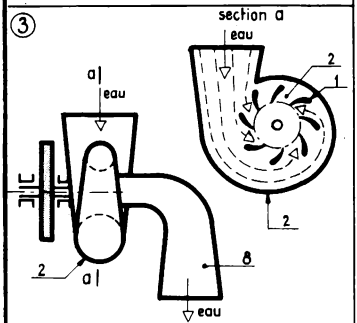
①



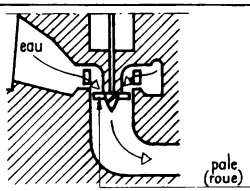
②



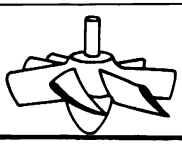
③



④



⑤



Turbine PELTON (à action) (fig. 3, M. 111).

Roue :
Comporte des **auges** (1) en forme de cuillers, assemblés deux par deux suivant une arête vive commune (fig. 4, M. 111).

A l'entrée d'un auget $v = u + w$.
A la sortie d'un auget $v' = u - w$.
$|w| = |w'|$ $(p = p')$.

Le travail fourni par l'unité de masse d'eau est maximum si $v' = 0$, soit $u = w' = w$ ou $\boxed{v = 2u}$

***Distributeur* (injecteur).**
Une (ou plusieurs) **tuyère** (2) (écoulement convergent), (section circulaire) dirige le jet d'eau (3) sur les auges tangentiellement à la roue.

(4) **Aiguille** (ou pointeau) : permet de diminuer ou d'augmenter la section de l'orifice de sortie de la tuyère (réglage de la puissance).

(5) **Déflecteur** : permet de dévier le jet d'eau.

La turbine PELTON convient pour $h > 100\,m$.
$2 < n_s < 24$ par jet et par roue.

Turbine FRANCIS (à réaction), (fig. 1, 2 et 3) à injection totale, roue entièrement immergée.

***Roue :* Les ailettes (ou aubes)** (6), recourbées font passer l'eau d'une direction radiale à une direction axiale.

Distributeur : (1) Ailettes orientables, (2) Bâche d'arrivée d'eau, (3) Cercle de vannage, (4) Biellette, (5) Manivelle (variation du débit).

Diffuseur (8) : permet d'évacuer l'eau plus facilement lorsque la turbine est placée au-dessus du canal de fuite (9). Il engendre une dépression qui accélère l'écoulement de l'eau.

La turbine FRANCIS convient pour $h < 300\,m$.
$60 < n_s < 420$

Fig. 2. Turbine FRANCIS à axe vertical;
Fig. 3. Turbine FRANCIS à axe horizontal.

Turbine-hélice (à réaction) (fig. 4 et 5).

Distributeur : ailettes orientables.

Roue (fig. 5) : semblable à une roue FRANCIS, mais avec un nombre réduit d'ailettes (5 en général) qui ressemblent aux **pales** d'une hélice de navire.

Turbine KAPLAN : roue-hélice à aubes orientables.
On place la roue-hélice bien au-dessous du distributeur afin que le courant d'eau traverse la turbine parallèlement à son axe.

Une turbine-hélice convient pour $h < 25\,m$.
$400 < n_s < 900$.

Turbine-tourbillon (fig. 5, M. 111) **à action ou à réaction.**

Roue : à augets en forme de cuillers gauches.

Distributeur : **bâche spirale** de hauteur constante h.
Une **pale-régulatrice** permet de régler débit et puissance.

Turbine-tourbillon-hélice : la pale régulatrice est supprimée, les pales de la roue sont orientables.

VIII

MÉCANIQUE DES FLUIDES

HYDRAULIQUE

PROPRIÉTÉS DES LIQUIDES

HYDROSTATIQUE

ÉCOULEMENT EN RÉGIME PERMANENT

CHARGE ET PERTE DE CHARGE

ORIFICES, DÉVERSOIRS

AJUTAGES

MESURES

CANALISATIONS

AÉRODYNAMIQUE

RÉSISTANCE DE L'AIR SUR LES SURFACES PLANES OU COURBES

RÉSISTANCE DE L'AIR SUR LES CORPS QUELCONQUES

POLAIRE DE PROFIL

APPLICATIONS À L'AVIATION

M. 113 PROPRIÉTÉS DES LIQUIDES

Objet de l'hydraulique.

Étude des lois de l'équilibre et du mouvement des liquides. Trois parties :

1. Hydrostatique.
Étude des conditions d'équilibre des liquides.
2. Hydrodynamique.
Étude des lois du mouvement des liquides.
3. Hydraulique proprement dite.
Étude des lois réelles de l'écoulement des liquides en vue des applications pratiques.

PROPRIÉTÉS DES LIQUIDES

1° Fluidité.

Masse liquide : ensemble de molécules extrêmement mobiles les unes par rapport aux autres. Pas de forme propre.

Liquide parfait : les molécules auraient une mobilité parfaite, glisseraient les unes sur les autres sans éprouver la moindre résistance.

2° Viscosité.

Caractérisée par la résistance au déplacement des molécules les unes sur les autres ; varie avec les liquides.

Les forces de viscosité sont des forces tangentielles de contact entre deux couches du fluide.

A et B étant deux tranches liquides d'épaisseur Δx, en contact sur une surface commune d'aire S, la tranche B ayant une vitesse V, la tranche A une vitesse $V + \Delta V$, l'action de contact tangentielle de A sur B où $\overrightarrow{F_B^A}$ a une action accélératrice et $\overrightarrow{F_A^B}$ une action retardatrice, on a :

$$F_B^A = F_A^B = S\mu \frac{\Delta V}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \frac{F}{S} = \mu \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

μ = coefficient de viscosité en $\frac{kgf \times s}{m^2}$

s = symbole de la seconde (unité de temps)

$\frac{F}{S} = F_1$ = force de viscosité par unité de surface en kgf/m^2 (homogène à une pression).

Nombre de REYNOLDS

Il chiffre l'influence de la viscosité :

ρ = masse volumique du liquide.

ϖ = poids volumique, $\rho = \frac{\varpi}{g}$

$\frac{\mu}{\rho}$ = coefficient de viscosité cinématique m^2/s.

V_∞ = vitesse à l'infini amont théorique de l'obstacle ou du conduit, donc à l'entrée de la zone d'influence.

d = plus petite dimension du modèle ou du conduit.

Le nombre de REYNOLDS est

$$\mathfrak{R} = \frac{V_\infty \times d}{\frac{\mu}{\rho}}$$

Pour écoulements hydrauliques très agités : $\mathfrak{R} = 40\,000$.

Écoulements sans agitations : $\mathfrak{R} < 2\,400$.

Exemple : Détermination du nombre de Reynolds relatif à la circulation de l'huile dans un palier. Données : $d = \frac{1}{100}\ mm = 10^{-5}\ m$, $V = 10\ m/s$ $\varpi = 0{,}9\ kgp/dm^3 = 900\ kgp/m^3$. $\mu = 2 \cdot 10^{-3} \frac{kgf \times s}{m^2}$, et $g \simeq 10$.

On obtient :

$$\mathfrak{R} \simeq \frac{10 \times 10^{-5}}{\frac{2 \times 10^{-3}}{90}} = 4{,}5 \text{ (valeur très faible).}$$

3° Turbulence.

Phénomène d'agitation, d'entremêlement désordonné des particules fluides. Dépend de l'agitation préalable du fluide avant l'entrée dans la zone d'influence de l'obstacle ou du conduit, de la rugosité propre des parois de l'obstacle ou du conduit placé dans le fluide ou autour du fluide.

Pertes de charge.

Pertes d'énergie par kgp de liquide. Dues aux actions de contact hydrodynamiques, dans le cas d'écoulements non turbulents ou laminaires ; seule intervient la viscosité.

Les pertes de charge sont alors proportionnelles à la vitesse.

$R = 6\mu r V_\infty$ (d'après STOKES).

R en kgf.

r = diamètre de l'obstacle en m.

Dans le cas d'écoulements très turbulents, elles sont proportionnelles au carré de la vitesse, la viscosité étant alors sans influence appréciable.

$$\varphi = \lambda \frac{V_\infty^2}{2g} \text{ en } m.$$

La turbulence est un élément favorable à la stabilité des écoulements, elle tend à s'opposer aux décollements du fluide des parois qui le guident.

4° **Compressibilité.**

v = volume de l'unité de poids m^3/kgp.
ϖ = poids de l'unité de volume kgp/m^3.

$$v = \frac{1}{\varpi}$$

p = pression à laquelle v est soumis, en kgp/m^2.

Accroissement de pression Δp.
Variation de volume $\Delta v < 0$.
Variation relative de volume $\frac{\Delta v}{v} < 0$.
Coefficient de compressibilité :

$$k = -\frac{\frac{\Delta v}{v}}{\Delta p} \qquad m^2/kgp.$$

Pour l'eau $k = \frac{1}{20\,000}$ (négligeable) dans le cas où $p \leqslant 1\,000\ kgp/cm^2$.

ÉQUILIBRE D'UN FLUIDE PESANT

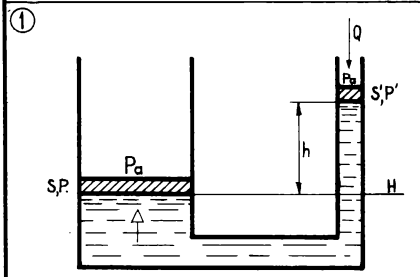
Principe fondamental de l'hydrostatique. La différence des pressions qui règnent sur deux plans horizontaux est égale au poids d'un cylindre liquide de base égale à l'unité de surface et de hauteur égale à la différence de niveau des deux plans

$$p - p_0 = \varpi(Z - Z_0)$$

Exemple : Calcul de la pression absolue en un point situé à 20 m de profondeur dans une masse d'eau en équilibre.

Solution :
pression absolue = pression atmosphérique + pression effective = $p_a + p_e$.
$P_a = 1{,}033\ kgp/cm^2 = 10\,330\ kgp/m^2$ (équivalente au poids d'une colonne d'eau de 10,33 m de hauteur).
$p_e = \varpi Z$ pour l'eau $\varpi = 1\,000\ kgp/m^3$.
$p_e = 1\,000 \times 20 = 20\,000\ kgp/m^2 = 2\ kgp/cm^2$.
$p = 10\,330 + 20\,000 = 30\,330\ kgp/m^2$
$= \mathbf{3{,}033}\ kgp/cm^2$.
Application aux coques de sous-marins.

①



THÉORÈME D'ARCHIMÈDE

La poussée d'un fluide sur un solide complètement immergé est une force verticale dirigée de bas en haut dont la valeur absolue est égale au poids du volume de fluide déplacé par le solide.

Équilibre des corps immergés.

Le poids du corps (appliqué en son centre de gravité) et la poussée du solide (appliquée au centre de poussée) doivent être égaux et directement opposés. Par suite, centre de gravité et centre de poussée doivent être sur la même verticale.

Equilibre stable si le centre de gravité est au-dessous du centre de poussée.

Équilibre des corps flottants.

Un corps partiellement immergé, ou flottant à la surface d'un liquide, est en équilibre lorsque le poids du corps, appliqué en son centre de gravité, est égal et directement opposé au poids du liquide déplacé appliqué en son centre de poussée.

THÉORÈME DE PASCAL

Dans un liquide incompressible en équilibre, les variations de pression se transmettent intégralement, normalement aux parois, en tous sens.

Application.

Principe de la presse hydraulique. Deux vases communicants contiennent de l'eau (fig. 1) ; deux pistons sans frottement, de même section que les vases S et S' ont des poids P et P'. Calcul de la dénivellation h.

Pression sous le grand plateau :

$$p_a + \frac{P}{S}$$

Pression sous le petit plateau :

$$p_a + \frac{P'}{S'}$$

En tous les points du plan horizontal H, la pression est la même :

$$p_a + \frac{P}{S} = p_a + \frac{P'}{S'} + \varpi h$$

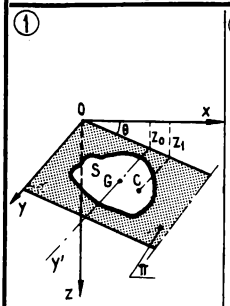
$$h = \frac{1}{\varpi}\left(\frac{P}{S} - \frac{P'}{S'}\right)$$

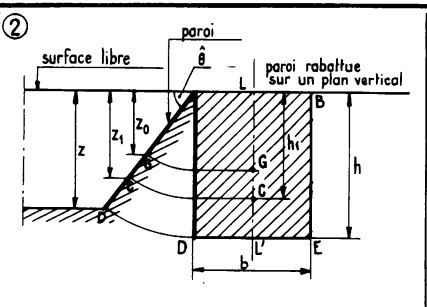
Si l'on exerce un effort Q sur le petit piston en tout point du liquide, l'accroissement de pression est $\frac{Q}{S'}$; poussée sous le grand piston :

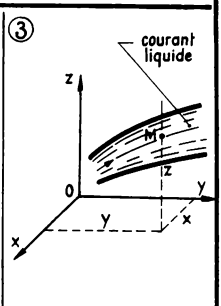
$$F = \frac{Q}{S'} \times S = Q \times \frac{S}{S'}$$

Si $d = 10\ cm$, $D = 100\ cm$: $F = Q \times \left(\frac{100}{10}\right)^2 = 100Q$.

M. 115 ÉCOULEMENT EN RÉGIME PERMANENT







POUSSÉE SUR UNE PAROI PLANE (fig. 1).

OX et OY définissent le plan de surface libre du liquide; la paroi plane π coupe la surface libre suivant OY. OZ est orienté dans le sens de la profondeur.

θ = angle d'inclinaison de la paroi sur le plan horizontal XOY.
S = aire limitée par une courbe sur cette paroi.
Z_0 = profondeur du centre de gravité de S.

La poussée sur S est $P = \varpi S Z_0$, donc égale au poids d'une colonne liquide ayant pour base la paroi et pour hauteur la profondeur de son centre de gravité au-dessous de la surface libre.

Le centre de poussée, ou centre de carène, est toujours plus bas que le centre de gravité $Z_1 > Z_0$.

Paroi rectangulaire.

Cas de mur-réservoir, vanne (fig. 2) :

$$P = \varpi S Z_0 \qquad S = bh \cdot \quad Z_0 = \frac{h}{2} \sin\theta$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\varpi b h^2 \sin\theta}$$

Si la paroi est verticale : $\sin\theta = 1$

et $$P = \frac{1}{2}\varpi b h^2.$$

Le centre de carène C est sur l'axe de symétrie LL' et $h_1 = \frac{2}{3}h$.

Application. Quelle est la poussée de l'eau, du côté amont, sur une vanne d'un canal d'évacuation ? La vanne est verticale, sa surface est 2 m^2, son centre de gravité est à 3 m au-dessous de la surface libre de l'eau.

Solution.

$$P = \varpi S Z_0$$

$\varpi = 1\,000\ kgp/m^3$ $\quad S = 2\ m^2$ $\quad Z_0 = 3\ m$

$P = 1\,000 \times 2 \times 3 = \mathbf{6\,000}\ kgp.$

DÉBIT. Volume du liquide qui traverse une section S pendant l'unité de temps Q = SV. (Q en m^3/s, S en m^2. V vitesse du fluide en m/s.)

ÉCOULEMENT PERMANENT

Le liquide est supposé incompressible. Les caractéristiques mécaniques d'un fluide dans une région limitée d'une veine sont **p, v, z.** Le régime est permanent si **p, v, z** sont indépendants du temps en un point donné de la veine : le régime est établi.

Dans le cas contraire, il est transitoire.

Vitesse moyenne.

La vitesse **v** d'un courant varie d'un filet à un autre par suite de la viscosité; on considère une vitesse moyenne dans la section, soit **U :**

$$U = \frac{Q}{S} = \frac{\text{débit en } m^3/s}{\text{section en } m^2}$$

Constance du débit.

En régime permanent le débit dans une section normale quelconque du courant est constant par rapport au temps, il est le même à chaque instant dans toutes les sections :

$Q = SU = S'U' = S''U'' = \ldots = \text{constante.}$

Continuité du débit.

Entre deux sections considérées, il n'y a ni perte, ni apport de fluide; donc ni branchement, ni fuite.

Théorème de BERNOULLI.

Z = cote d'un point M quelconque du filet fluide par rapport au plan horizontal XOY quelconque lui-même (fig. 3).

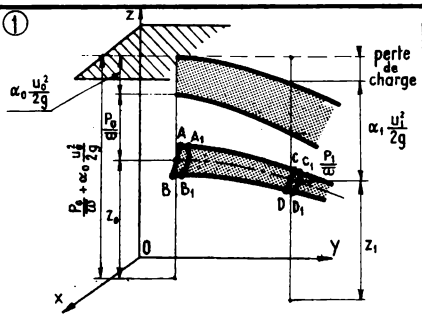
En tous points d'un milieu dans lequel s'écoule un fluide incompressible, l'énergie qu'il contient par kgp de fluide est :

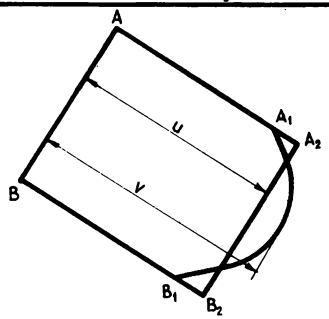
$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\varpi} + Z} \quad \mathcal{E} \text{ en } m.$$

$\frac{P}{\varpi}$ = hauteur piézométrique (en m).

= hauteur à laquelle s'élève le fluide du fait de sa pression.

CHARGE ET PERTE DE CHARGE

① 

② 

$\frac{V^2}{2g}$ = hauteur capable de la vitesse V.

= hauteur que le liquide atteindrait en vertu de sa vitesse V si, par exemple, le filet s'écoulant dans un tube celui-ci était recourbé verticalement au point M.

Théorème de BERNOULLI.

Dans le cas d'un liquide incompressible, et en régime permanent, la cote d'un point d'un filet, la hauteur piézométrique en ce point et la hauteur capable de la vitesse au même point forment une somme constante tout le long du filet.

$Z + \frac{p}{\omega} + \frac{v^2}{2g}$ = charge du liquide par rapport au plan XOY, en *m*.

Relation entre charge et énergie.

m, mg, v, p, ϖ, z
sont les : masse, poids, vitesse, pression, poids spécifique et cote d'un élément d'un filet liquide.

mgz = énergie potentielle de position.

$mg.\frac{p}{\omega}$ = énergie potentielle de pression.

$\frac{1}{2}mv^2 = mg \times \frac{v^2}{2g}$ = énergie cinétique.

$mg\left(Z + \frac{p}{\omega} + \frac{v^2}{2g}\right)$ = énergie totale.

Si mg = 1 :

$Z + \frac{p}{\omega} + \frac{v^2}{2g}$ = énergie totale de l'unité de poids.

Exemple : Calcul de l'énergie de 1 *kgp* d'eau, situé à 2 *m* au-dessus d'un plan horizontal, sous la pression de 1 kgp/cm^2 ; vitesse d'écoulement 3 *m/s*.

Solution.

$p = 1\ kgp/cm^2 = 10\,000\ kgp/m^2 \quad \varpi = 1\,000\ kgp/m^3.$

$$\frac{p}{\varpi} = \frac{10\,000}{1\,000} = 10\ m.$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{3^2}{2 \times 9{,}81} = \frac{9}{19{,}62}\left(\frac{m^2/s^2}{m/s^2} = m\right).$$

$$W = 2 + 10 + 0{,}46 = 12{,}46\ kgm.$$

Perte de charge (p. d. c) (fig. 1).

AB = section droite d'un filet liquide.

A_1B_1 = position, au bout de l'unité de temps, des particules primitivement situées sur AB ; par suite de la viscosité A_1B_1 est une surface gauche.

Q = débit = volume ABA_1B_1.
= volume ABA_2B_2 (fig. 2).

AA_2 = vitesse moyenne **u**.

m = masse de la tranche mince de liquide AA_1BB_1.

W_0 = énergie de cette tranche.

$$W_0 = mg\left(Z_0 + \frac{p_0}{\omega} + \alpha_0 \frac{U_0^2}{2g}\right)$$

α = coefficient d'inégalité des vitesses, dépend de la viscosité du liquide et de la rugosité des parois.
α = 1,1 à 1,2 ordinairement.
α = 1,5 et plus pour parois très rugueuses.

W_1 = énergie de cette tranche à la position CDC_1D_1.

$$W_1 = mg\left(Z_1 + \frac{p_1}{\omega} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g}\right)$$

Dans un courant liquide $W_1 < W_0$, $W_0 - W_1$ = perte de charge entre les deux sections = pdc.

$$Z_0 + \frac{p_0}{\omega} + \alpha_0 \frac{U_0^2}{2g} = Z_1 + \frac{p_1}{\omega} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} + \text{pdc}$$

Le plan horizontal de cote :

$$Z_0 + \frac{p_0}{\omega} + \alpha_0 \frac{U_0^2}{2g}$$

est le plan de charge dans la section AB.

Le plan horizontal de cote :

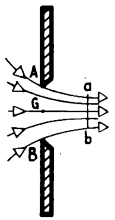
$$Z_1 + \frac{p_1}{\omega} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g}$$

est le plan de charge dans la section CD.

Les cotes Z_0 et Z_1 sont celles des centres de gravité des sections AB et CD.

M. 117 ORIFICES - DÉVERSOIRS

①



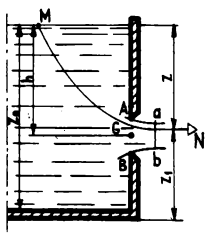
ORIFICE EN MINCE PAROI DE FAIBLE HAUTEUR

L'orifice est en mince paroi lorsque le jet liquide ne touche que le bord interne de l'orifice : cas d'orifice en biseau (fig. 1), ou si l'épaisseur de la paroi est inférieure à la moitié de la plus petite dimension de l'ouverture.

A l'intérieur du réservoir, les filets liquides convergent vers l'orifice et, à une distance égale environ au diamètre de l'ouverture (si elle est circulaire), ils deviennent sensiblement parallèles, puis continuent dans l'air sous forme parabolique.

Section contractée ab.

②



Relation de TORRICELLI.

Réservoir maintenu à niveau constant et ayant un orifice en mince paroi (fig. 2). Appliquer au filet MN la relation de Bernoulli.

$$Z_0 + \frac{p_0}{\varpi} + \frac{v_0^2}{2g} = Z_1 + \frac{p_1}{\varpi} + \frac{v_1^2}{2g} + pdc$$

$p_0 = p_a$ (pression atmosphérique).

$P_1 = P_a$

v_0 négligeable (niveau constant, grande surface du réservoir par rapport à l'orifice).

pdc négligeable

$$Z_0 + \frac{p_a}{\varpi} = Z_1 + \frac{p_a}{\varpi} + \frac{v_1^2}{2g} \text{ ou } \frac{v_1^2}{2g} = Z_0 - Z_1 = Z$$

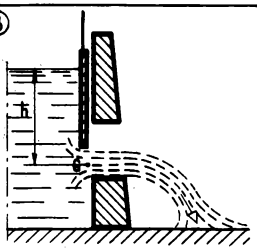
et $v_1 = \sqrt{2gZ}$.

Pour des filets très minces $Z \simeq h$ = profondeur du centre de gravité de l'orifice :

$$\boxed{V = \sqrt{2gh}}$$

C'est la vitesse d'un corps qui tomberait dans le vide depuis la surface libre jusqu'au niveau du centre de gravité de l'orifice.

③



Débit.

La vitesse théorique $V = \sqrt{2gh}$ doit être corrigée pour tenir compte des approximations ci-dessus au moyen d'un coefficient $r < 1$ mais très voisin de 1, $V = r\sqrt{2gh}$.

S' = section contractée ab.

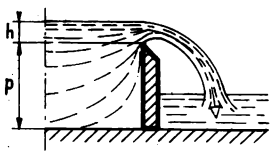
S = section de l'orifice AB.

$S' = \mu S$, $\mu < 1$ = coefficient de contraction.

$Q = S'V = \mu r\, S\sqrt{2gh} = mS\sqrt{2gh}$ avec $m = \mu r$

$0{,}57 < m < 0{,}70$, en moyenne $m = 0{,}62$.

④

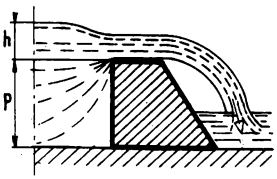


ORIFICE EN PAROI ÉPAISSE (fig. 3).

Débit : $Q = mS\sqrt{2gh}$.

Orifice en général rectangulaire et réglable avec une vanne.

⑤



DÉVERSOIRS

Orifice, en général rectangulaire, ouvert à sa partie supérieure.

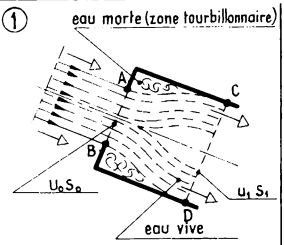
La base horizontale est la crête.

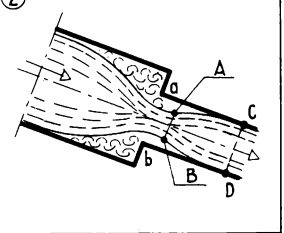
Déversoir en mince paroi (fig. 4), à crête épaisse (fig. 5).

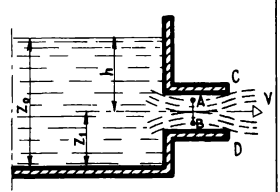
Débit : $Q = mLh\sqrt{2gh}$, $m = 0{,}40$ (valeur moyenne).

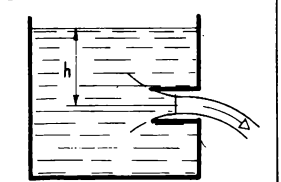
L = longueur du déversoir ; h = charge au-dessus du seuil ; m = coefficient de débit (voir tables de BAZIN).

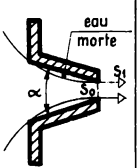
AJUTAGES

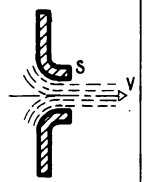
① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

⑥ 

CHANGEMENT BRUSQUE DE SECTION D'UN COURANT LIQUIDE

Il provoque une perte de charge. Formation dans les angles d'une masse d'eau morte qui tourbillonne sur place. Vitesse moyenne :

dans AB $= U_0 = \frac{Q}{S_0}$, dans CD $= U_1 = \frac{Q}{S_1}$ (fig. 1)

Perte de charge : p.d.c. $= \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g}$.

Dans le cas d'un élargissement brusque elle est égale à la hauteur capable de la vitesse perdue.

D'après les expériences de BORDA, la p.d.c. théorique est à majorer de $\frac{1}{9}\frac{U_1^2}{2g}$ d'où p.d.c. $= \frac{(U_0-U_1)^2}{2g} + \frac{1}{9}\frac{U_1^2}{2g}$

$= \frac{U_1^2}{2g}\left[\left(\frac{U_0}{U_1}-1\right)^2 + \frac{1}{9}\right] = \frac{U_1^2}{2g}\left[\left(\frac{S_1}{S_0}-1\right)^2 + \frac{1}{9}\right]$

puisque $\frac{U_0}{U_1} = \frac{S_1}{S_0}$.

Dans le cas de rétrécissement brusque (fig. 2) :

p.d.c. $= \frac{U_1^2}{2g}\left[\left(\frac{S_1}{\mu S_0}-1\right)^2 + \frac{1}{9}\right]$, si ab = CD.

$\mu = m = 0{,}62$ et pdc $= \frac{U_1^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{0{,}62}-1\right)^2 + \frac{1}{9}\right] \simeq \frac{1}{2}\frac{U_1^2}{2g}$.

AJUTAGE CYLINDRIQUE EXTÉRIEUR

Cas où le diamètre de l'ajutage est faible devant la hauteur d'eau à niveau constant et de grande étendue (fig. 3). $Z_0 + \frac{p_a}{\varpi} + \frac{v_0^2}{2g} = Z_1 + \frac{p_a}{\varpi} + \frac{v^2}{2g} + \text{pdc}$

or $v_0 = 0$; pdc $= \frac{1}{2}\frac{U_1^2}{2g} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{2g}$; $Z_0 - Z_1 = h$;

$h = \frac{3}{2}\frac{v^2}{2g}$ d'où $\boxed{v = 0{,}82\sqrt{2gh}.}$

$Q = Sv = 0{,}82\, S\sqrt{2gh}$

En mince paroi, on a $v = \sqrt{2gh}$ et $Q = 0{,}62S\sqrt{2gh}$.

L'ajutage diminue la vitesse, mais augmente le débit.

AJUTAGE CYLINDRIQUE INTÉRIEUR (fig. 4).

L'écoulement a lieu comme en mince paroi. Le jet ne touche pas la surface interne de l'ajutage $v = \sqrt{2gh}$. La section contractée a pour aire la moitié de celle de l'ajutage $Q = 0{,}50\, S\sqrt{2gh}$

AJUTAGE CONIQUE

En général convergent (fig. 5).

Filets convergents ; minimum de section un peu au-delà de la sortie $S_1 < S_0$ $S_1 = \mu S_0$.

μ dépend de l'angle α au sommet du cône.

$v = r\sqrt{2gh}$; r = coefficient de pdc à l'intérieur de l'ajutage.

$Q = m\, S_0 \sqrt{2gh}$ avec $m = \mu r$.

Pour $\alpha = 0$, $m = 0{,}82$.

m croit avec α jusqu'à un maximum voisin de 12° pour lequel $m = 0{,}85$.

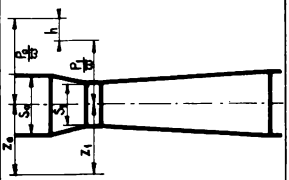
En terminant l'ajutage par un cylindre de faible longueur, on supprime la contraction de la section et m croît jusqu'à 0,98.

Ajutage à veine moulée (fig. 6).

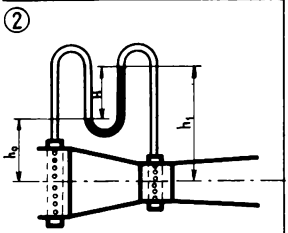
Epouse la forme du jet en mince paroi entre le plan de l'orifice et la section contractée. $Q = 0{,}98S\sqrt{2gh}$.

M. 119 MESURES DE DÉBIT ET VITESSE

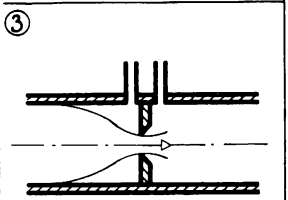
①



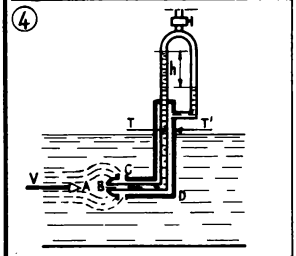
②



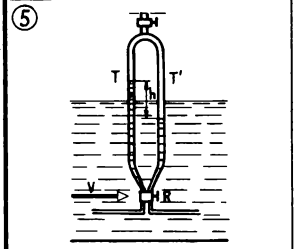
③



④



⑤



MESURE DU DÉBIT DES CONDUITES FORCÉES

Compteur VENTURI : inventé par Clemens HERSCHELL, se compose d'un convergent conique réuni par un tuyau cylindrique à un divergent conique (fig. 1).

U_0 = vitesse de l'eau dans la conduite de section S_0.
U_1 = vitesse dans la section rétrécie S_1.

$Q = U_0S_0 = U_1S_1 \quad S_1 < S_0$ donc $U_1 > U_0$

D'après la relation de Bernoulli

$$Z_0 + \frac{p_0}{\varpi} + \alpha_0 \frac{U_0^2}{2g} = Z_1 + \frac{p_1}{\varpi} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g}$$

Les pertes de charge, très faibles, sont négligées. L'axe de l'appareil est horizontal donc $Z_0 = Z_1$.

$U_0 = \frac{Q}{S_0}$ et $U_1 = \frac{Q}{S_1}$ d'où $\frac{p_0 - p_1}{\varpi} = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{\alpha_1}{S_1^2} - \frac{\alpha_0}{S_0^2}\right)$

$\frac{p_0 - p_1}{\varpi}$ = dépression = h mètres d'eau.

$$Q = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{\alpha_1}{S_1^2} - \frac{\alpha_0}{S_0^2}}} = K\sqrt{h}$$

En tenant compte de la perte de charge $\boxed{Q = rK\sqrt{h}}$

Débit proportionnel à la racine carrée de la dépression.
rK ≐ constante de l'appareil donnée par le constructeur.
h mesuré, non en mètres d'eau, mais en mètres de mercure au moyen d'un manomètre différentiel (fig. 2), d'où élimination des remous et réduction des dimensions, poids spécifique du mercure : 13,6 *kgp/dm³*, de l'eau ≃ 1 *kgp/dm³*.

$p_0 - p_1 = 13{,}6\ H - 1 \times H = 12{,}6\ H = h$

Permet la mesure du débit avec une précision de 2 %.

VENTURI-diaphragme.

Diaphragme = cloison de faible épaisseur dans laquelle est percé un orifice en mince paroi (fig. 3).

Pour conduite forcée l'orifice est circulaire.

On mesure la dépression de part et d'autre du diaphragme comme dans le compteur VENTURI. On a encore : $Q = rK\sqrt{h}$

MESURE DE LA VITESSE D'UN COURANT LIQUIDE

Tube de PITOT.

Formé de deux tubes concentriques coudés à angle droit T et T′ reliés en B où T′ est arrondi (fig. 4).

La branche BD est orientée suivant le courant.

Fait d'expérience : V en A à l'entrée de la zone perturbée diminue rapidement et s'annule en B, reprend sa valeur en C où des orifices mettent l'eau en relation avec T′. Application de la relation de Bernoulli.

$\frac{p_0}{\varpi} = \frac{p_1}{\varpi} + \frac{v^2}{2g} \qquad \frac{v^2}{2g} = \frac{p_0 - p_1}{\varpi} = h \qquad V = \sqrt{2gh}$

Convient pour des vitesses supérieures à 1 *m/s*.

Tube de DARCY (fig. 5).

T et T′ sont montés sur une planchette qui peut tourner et s'orienter d'elle-même dans le courant. T et T′ ont 10 *mm* de diamètre sauf à leur partie inférieure où ils n'ont que 1,5 *mm*. Ils sont commandés par le même robinet R.

CONDUITE FORCÉE

L'eau remplit entièrement la conduite et circule sous pression; section circulaire. Régime permanent et uniforme.

Pertes de charge (p.d.c.).

$J = \frac{\text{h (perte de charge entre 2 sections)}}{\text{L (distance en mètres entre sections)}}$

f = résistance de la conduite par unité de surface mouillée *(frottements, tourbillonnements)*.
D = diamètre de la conduite.
u = vitesse moyenne.

Forme générale de la perte de charge :

$$J = \frac{4}{D}\varphi(u) \text{ où } \varphi(u) = \frac{1}{4}DJ$$

$\varphi(u)$ est déterminée expérimentalement.

Formule de DARCY,
valable pour $0{,}10 < D < 0{,}50$ *m*.

$$J = \frac{4}{D}\left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right)u^2$$

α et β sont des coefficients de rugosité.
Pour tuyaux en service :
$\alpha = 0{,}000507$ $\beta = 0{,}00001294$
Pour tuyaux neufs prendre la moitié.

Formule de FLAMANT,
valable pour $0{,}50\ m < D < 1{,}25\ m$

$$J = 0{,}00092\sqrt[4]{\frac{u^7}{D^5}}$$

Formule de Maurice LEVY,
valable pour $D > 1{,}25\ m$.

$$u = A\sqrt{\frac{DJ}{2}\left(1 + 3\sqrt{\frac{D}{2}}\right)}$$

A = 36,4 pour fonte neuve.
A = 20,5 pour fonte usagée et tôle d'acier.
A = 25 à 28 pour béton.

Calcul des conduites.

Quatre quantités interviennent :
Q D J u

Deux d'entre elles étant fixées, les deux autres peuvent être calculées au moyen des relations :

$$\varphi(u) = \frac{1}{4}DJ \quad \text{et} \quad Q = \frac{\pi D^2}{4}u.$$

Coup de bélier.

Si l'on arrête l'écoulement dans une conduite par la fermeture d'une vanne d'aval, on supprime l'énergie cinétique de la masse d'amont; cette énergie cinétique se transforme en énergie potentielle de pression et crée une surpression dont l'importance croît avec la rapidité de fermeture de la vanne : c'est le coup de bélier.

Phénomène oscillatoire qui dépend de la compressibilité du liquide et de l'élasticité de la conduite.

La vitesse de propagation de l'onde de pression, ou célérité, est donnée par la formule d'ALLIEVI.

$$a = \frac{9\,900}{\sqrt{48{,}3 + K\frac{D}{e}}}.$$

a = célérité en *m/s*.
D = diamètre de la conduite en *m*.
e = épaisseur de la conduite en *m*.
K = coefficient variable avec le matériau de la conduite.

K = 1 pour la fonte; 0,5 pour l'acier; 5 pour le plomb.

Pour conduites forcées d'usines hydrauliques a est de l'ordre de 1 000 *m/s*, mais peut avoir des valeurs inférieures de l'ordre de 400 *m/s*.

La valeur de la surpression maximum est:

$$Y_{max} = A\frac{LV_0}{T}.$$

L = longueur de la conduite.
V_0 = vitesse de l'eau avant la fermeture de la vanne.
T = temps de fermeture totale de la vanne.

Dispositifs anti-béliers : dispositifs qui donnent à T une valeur suffisamment grande et fixée à l'avance.

Cheminée d'équilibre : cheminée verticale de section au moins égale à la moitié de celle de la conduite et implantée le plus près possible de l'usine.

CONDUITES À ÉCOULEMENT LIBRE

Canaux découverts, rivières, aqueducs couverts.

Formule de BAZIN.

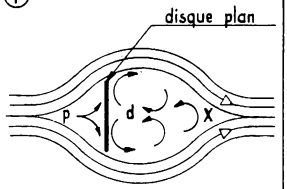
$$u = \frac{87\sqrt{Rh}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}.$$

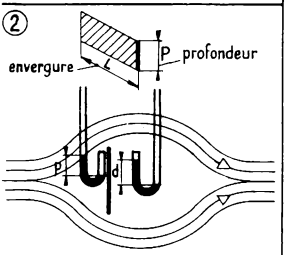
h = pente du canal en *mm*.
R = rayon moyen de la section $= \frac{\text{section d'écoulement}}{\text{périmètre mouillé}}$.
γ = coefficient qui dépend de la nature des parois; 0,06 ciment lissé; 0,46 maçonnerie; 1,30 canaux en terre.

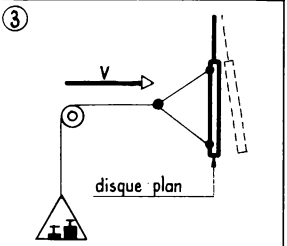
Débit : $Q = Su$

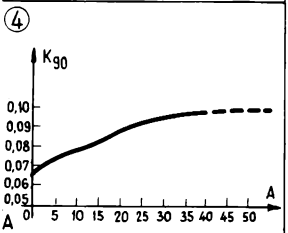
RÉSISTANCE DE L'AIR (I)

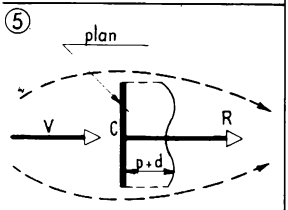
(SURFACES PLANES)

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

Influence de l'altitude.

H_o = pression à l'altitude 0 ; H_z = pression à l'altitude Z. (altitude en m)

$$Z = 18\,400 \log \frac{H_o}{H_z} = 18\,400 \log \frac{1}{\mu} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{H_z}{H_o}$$

δ_o, δ_z, ϖ_o, ϖ_z = densités et poids spécifiques de l'air à l'altitude 0 et à l'altitude Z on a

$$\Delta = \frac{\delta_z}{\delta_o} = \frac{\varpi_z}{\varpi_o}$$

La température diminue de 1 °C environ pour un abaissement de $\frac{1}{55}$ de la pression.

$$t_z = 15^o - 55(1 - \mu).$$

Les pressions sont évaluées en mm de mercure (hauteur barométrique). Atmosphère standard.

Altitude en m	0	1 000	2 500	5 000	10000	14000
Pression en mm de mercure	760	674	560	405	198	106
Poids spécifique en kgp/m^3.	1,225	1,112	0,957	0,736	0,261	0,139
Température en degrés C..	15°	9°	1°	—18°	—50°	-56,5°

RÉSISTANCE DE L'AIR SUR LES PLANS

Spectre aérodynamique d'un disque plan perpendiculaire à la vitesse (fig. 1).

p = pression à l'avant ; **d** = dépression à l'arrière.

Pas de régime stable en **dX.**

Effort supporté par la plaque : R = d + p.

d et **p** mesurés au moyen de manomètres sensibles (fig. 2).

R mesuré par équilibrage (fig. 3).

Incidence = angle que fait le plan avec la direction de la vitesse ; pour $0 < V < 100\ m/s$, on a $\boxed{R = K_{90} S V^2}$

S = aire du plan en m^2.

V = vitesse du courant d'air, ou vitesse du plan par rapport à l'air immobile.

$\mathbf{K_{90}}$ = coefficient numérique à l'incidence 90°.

Si $S = 1\ m^2$; $V = 1\ m/s$; $R = 0{,}08\ kgf$, donc $K_{90} = 0{,}08$.

K_{90} est proportionnel à la densité de l'air, varie avec la forme de la surface, augmente avec le périmètre et le nombre d'angles vifs. Pour un rectangle, il croît avec l'allongement $A = \frac{L}{P}$. Variations de K_{90} avec A (fig. 4).

CENTRE DE POUSSÉE

C'est le point C où la direction de la résultante des forces agissant sur chaque élément de surface rencontre le plan. La courbe de répartition des pressions (fig. 5) montre que pour une incidence 90° l'action de l'air se répartit également autour du centre de la plaque.

R est appliquée au centre de la plaque et sa direction est perpendiculaire à la plaque.

L = longueur de la plaque ou envergure.

P = largeur ou profondeur de la plaque.

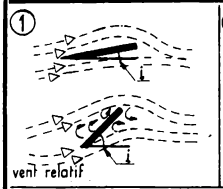
Allongement $A = \frac{L}{P} = \frac{L^2}{LP} = \frac{L^2}{S}$

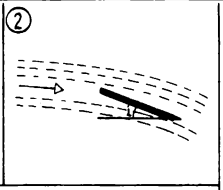
$$A = \frac{\text{carré d'envergure}}{\text{surface}}$$

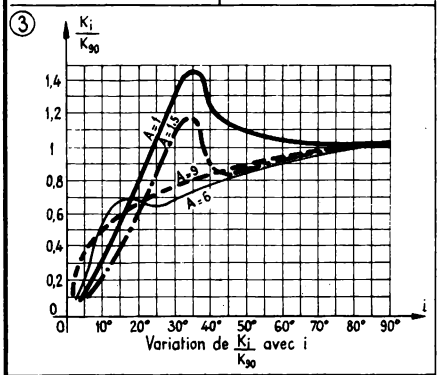
RÉSISTANCE DE L'AIR (2)

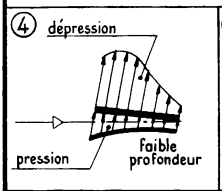
(SURFACES PLANES)

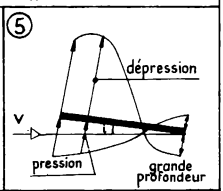
M. 122

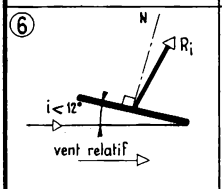


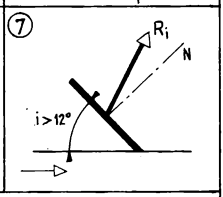


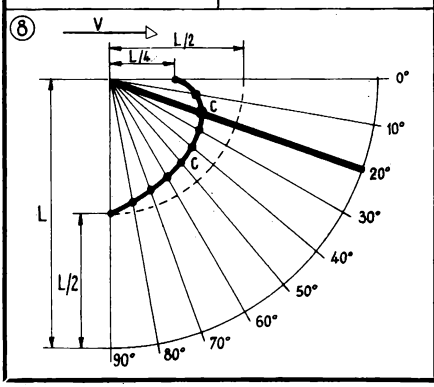












Variations de K avec l'incidence.

L'incidence varie ; les filets d'air ne sont plus déviés symétriquement ; il existe une pression au-dessous de la plaque et une dépression au-dessus, une zone tourbillonnaire se propage vers l'arrière (fig. 1 et 2). Pour $i = 38^o$ l'importance des remous est considérable.

Loi de la résistance pour $0 < V < 100\ m/s$)

$$R_i = K_i S V^2$$

Pour les plaques rectangulaires l'air s'échappe latéralement et n'agit plus sur une certaine bande le long du bord par suite du décollement des filets d'air qui engendrent des remous.

Ce sont les **pertes marginales.**

Intérêt à développer la surface en envergure plutôt qu'en profondeur.

Les meilleurs allongements sont compris entre 6 et 10.

Variations de $\frac{K_i}{K_{90}}$ avec i pour plans carrés et rectangulaires pour A = 1 ; 1,5 ; 6 ; 9 (fig. 3). Pour $0 < i < 15^o$ les plaques rectangulaires donnent des efforts plus grands que les plaques carrées.

Répartition des pressions.

Les pressions et dépressions sont plus élevées au voisinage du bord avant que le long de la profondeur.

Elles vont en diminuant vers le bord arrière où elles deviennent nulles.

Aux petites incidences la dépression est les 3/4 de la poussée totale : une voilure est plus aspirée qu'elle n'est soutenue (fig. 4 et 5).

Centre de poussée.

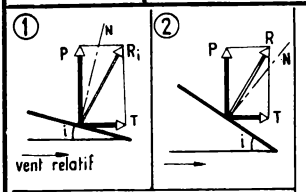
La résultante R_i a une direction voisine de la normale à la plaque. Aux petites incidences $0 < i < 12^o$ elle se trouve en arrière de la normale (fig. 6). Pour les plus grandes incidences elle passe en avant (fig. 7). Ceci tient à la présence des remous et aux frottements sur la plaque.

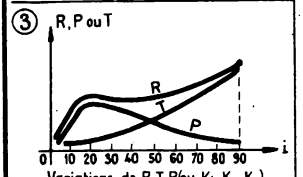
Le diagramme des répartitions des pressions (fig. 8) montre que le centre de poussée C, situé à mi-profondeur pour $i = 90^o$, se rapproche graduellement du bord avant au fur et à mesure que l'incidence diminue pour se trouver au premier quart avant de la plaque au voisinage de $i = 0$.

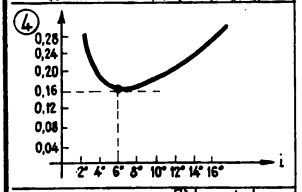
M. 123

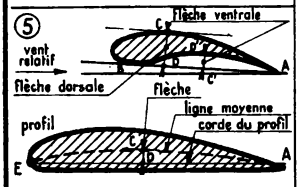
RÉSISTANCE DE L'AIR (3)

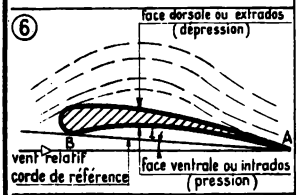
(SURFACES COURBES)

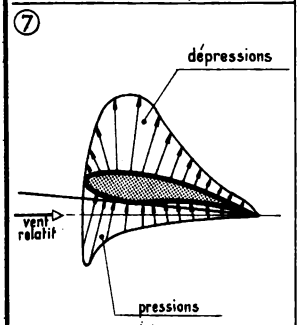












TRAINÉE - POUSSÉE (fig. 1 et 2).

R_i admet 2 composantes : La composante verticale ou poussée **P** donne la sustentation aérodynamique $K_y SV^2$. La composante horizontale ou traînée $T = K_x SV^2$.

Aux petites incidences ($0 < i < 15°$) **P** est grand par rapport à **T** ; puis **P** décroît et **T** croît lorsque **i** augmente (fig. 3).

Le rapport

$$\frac{T}{P} = \frac{K_x SV^2}{K_y SV^2} = \frac{K_x}{K_y}$$

passe par un minimum (fig. 4) pour une incidence optimum i_0 qui est le meilleur angle d'utilisation de la surface.

Pour les plaques $\frac{K_x}{K_y} \simeq 0{,}15$, il varie avec la forme.

Finesse.

$$f = \frac{P}{T} = \frac{K_y}{K_x}$$

caractérise la qualité aérodynamique de la plaque ; **f** optimum pour le maximum de **f**.

RÉSISTANCE DE L'AIR SUR LES SURFACES COURBES

Corde de référence ou de profil = tangente AB au bord avant et au bord arrière (fig. 6) ; ou droite AE joignant les extrémités de la ligne moyenne (fig. 5).

Flèche = CD = hauteur maximum entre courbe et corde ; se mesure en portion de corde :

$$\text{flèche } \frac{1}{20} = \frac{CD}{AB} \quad \text{ou} \quad CD = \frac{AB}{20}$$

Incidence ou angle d'attaque.

Angle **i** formé par la corde et la direction du vent relatif ($i > 0$ ou $i < 0$).

L'expérience montre que les surfaces courbes sont plus porteuses que les surfaces planes ; elles sont encore porteuses pour $i \leqslant 0$ jusqu'à $i = -6°$. Cela tient à une dépression au-dessus de l'extrados qui est beaucoup plus importante que la pression sur la surface ventrale (jusqu'à 3 fois plus importante) (fig. 7).

Angle de calage.

Angle **C** formé par la corde de référence et une ligne droite fixe (axe du fuselage de l'avion par exemple).

Spectre aérodynamique.

Sensiblement analogue à celui des plans ; l'allure des filets d'air est plus régulière, ils sont rejetés plus fortement et progressivement sur l'extrados (fig. 6).

Répartition des pressions.

Dépressions au-dessus et pressions au-dessous plus importantes qu'avec les plans, surtout aux petits angles d'incidence.

On a encore $R_i = K_i SV^2$.

K_i est différent de celui des plans et varie avec la courbure.

L'allongement se fait sentir d'une façon analogue à celui des rectangles plans ; les surfaces les plus avantageuses sont celles pour lesquelles $6 < A < 10$.

K_i croît avec la flèche.

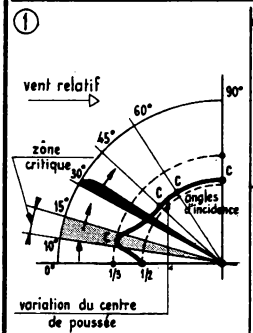
Intérêt à placer la flèche entre le $\frac{1}{4}$ et le $\frac{1}{3}$ avant.

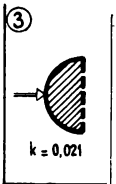
La courbure doit être plus prononcée à l'avant qu'à l'arrière.

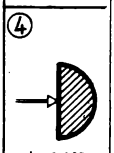
RÉSISTANCE DE L'AIR (4)

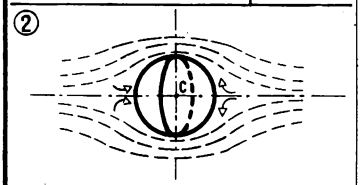
(CORPS QUELCONQUES)

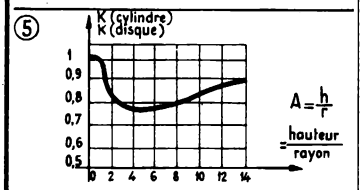
M. 124

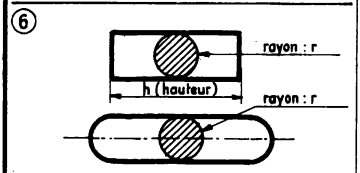


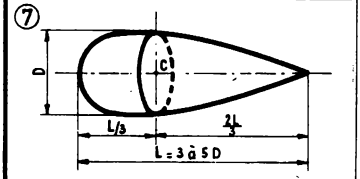












Cylindre	h = r	K = 0,068
	h = 4r	K = 0,059
	h = 15r	K = 0,059
Cône, angle 30°		K = 0,021
Corps sphéro-conique		
Cône à l'avant		K = 0,0101
Cône à l'arrière		K = 0,0055
Corps ovoïde		K = 0,002.

Résultante - Centre de poussée (C).

La résultante s'écarte peu de la direction de la perpendiculaire à la corde.

Pour i = 90°, le centre de poussée est situé à mi-profondeur ; il se rapproche du bord avant lorsque i diminue ; pour i = 10° à 15° (suivant les profils), le centre de poussée vient brusquement en avant jusqu'au premier tiers environ pour revenir vers le milieu pour i = 0 (fig. 1).

RÉSISTANCE DE L'AIR (CORPS QUELCONQUES)

Sphère. Résistance 6 fois moindre que pour un disque plat de même diamètre normal au vent K = 0,011 kgf/m^2, car proue et poupe ont même importance (plus faible que pour le disque) (fig. 2).

Demi-sphère (fig. 3 et 4).

Cylindre. Se déplace suivant son axe, normalement aux cercles de base. R varie avec A ; décroît d'abord quand A croît, passe par un minimum pour h = 4r ou 5r puis croît ensuite (fig. 5).

Avec des extrémités en demi-sphères la résistance devient 5 fois plus faible (fig. 6).

Corps sphéro-coniques.

Cône à l'avant : R est double de ce qu'elle serait si le cône était à l'arrière ; dans ce dernier cas elle serait la moitié de celle d'un disque mince de même diamètre.

Corps fuselés ou profilés.

C'est la forme qui donne la moindre résistance. Elle doit satisfaire aux conditions suivantes :

1° A l'avant : diminuer le choc des filets d'air, les séparer progressivement, puis les rejeter régulièrement.

2° A l'arrière : diminuer la dépression, permettre aux filets d'air de se rejoindre sans heurts suivant une direction parallèle au déplacement relatif.

L'étendue de la zone de dépression arrière est beaucoup plus grande que celle des pressions avant, donc la partie arrière du fuselage doit être beaucoup plus longue que la partie avant et aller en s'amincissant pour guider les filets d'air (fig. 7). La courbure arrière a beaucoup plus d'importance que la courbure avant. Corps trop court à l'arrière : dépression ; corps trop long : remous et frottements.

Lois générales

$\boxed{R = KSV^2}$ (1) Voir ci-contre quelques valeurs de K.

S = section du maître-couple = section du corps qui offre la plus grande surface perpendiculairement au vent.

Formule valable si $\frac{V^2}{C^2} = \frac{V^2}{340^2}$ est négligeable devant (1)

C = célérité du son dans l'air (340 *m/s* à 15° C).

Exemple :

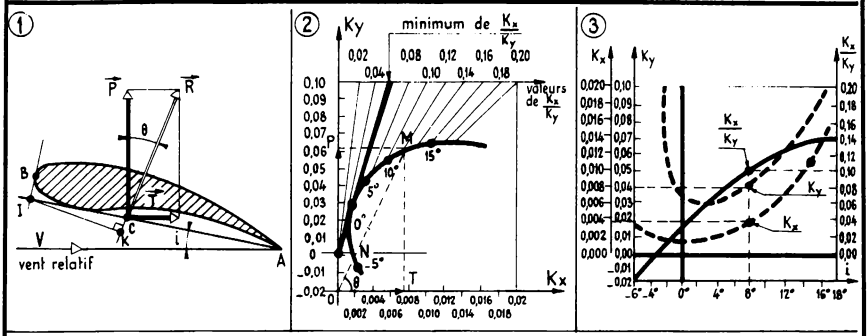
V = 180 *km/h*, soit 50 *m/s* : $\frac{50^2}{340^2} \simeq \frac{1}{50}$ formule (1) valable.

V = 360 *km/h*, soit 100 *m/s* : $\frac{100^2}{340^2} \simeq \frac{1}{11}$ formule (1) non valable.

Formule non valable à partir de V = 300 *km/h*. Recourir à l'expérimentation. Pour projectiles R = KSV^2.

M. 125 — POLAIRE DE PROFIL

AILES D'AVION



Problème.

Une automobile, largeur 1,61 *m*, hauteur 1,56 *m*, roule à 108 *km/h* ; son coefficient aérodynamique est 0,05. Quelle est la puissance absorbée par la résistance de l'air à cette vitesse ?

Solution.

$R = KSV^2$ (R en *kgf* si S m^2 et V *m/s*).

Puissance absorbée :

$P = RV = KSV^3$ *kgm/s*.

(Remarquer que la puissance croît avec le cube de la vitesse.)

Soit en *ch* : $\mathcal{P} = \frac{1}{75} KSV^3$.

S = section du maître-couple $\simeq$ 1,61 × 1,56 $\simeq$ 2,5 m^2.

$V = \frac{108\,000}{3\,600} = 30$ *m/s*.

$\mathcal{P} = \frac{1}{75} \times 0{,}05 \times 2{,}5 \times 30^3 = 45$ *ch*.

Application aux ailes d'avion.

Ailes épaisses (fig. 1).

Portance.

C'est la composante de $\vec{R}$ normale à V.

Soit $\vec{P}$: $P = C_z qS$

C_z = coefficient de portance, dépend des actions normales et des forces tangentielles.

q = pression dynamique = $\frac{\bar{\omega}}{2g} V^2$.

$$P = C_z \frac{\bar{\omega}}{2g} SV^2$$

Traînée $\vec{T}$.

Composante de R parallèle à la direction du mouvement :

$$T = C_x \frac{\bar{\omega}}{2g} SV^2$$

C_x = coefficient de traînée.

Finesse aérodynamique.

$$\frac{P}{T} = \frac{C_z}{C_x} = \text{tg } \theta.$$

Centre de poussée.

Intersection C de $\vec{R}$ et de la corde de l'aile.

Moment de tangage.

Soit I la projection du bord d'attaque sur la corde de l'aile.

$$\mathcal{M}_I(R) = IK \cdot R \simeq IC \frac{\bar{\omega}}{2g} C_x SV^2.$$

Coefficient de tangage.

$$C_m = \frac{IC}{L} \cdot C_z$$

L = longueur de la corde.

POLAIRE D'UN PROFIL D'AILE

Courbe de variations de K_y en fonction de K_x lorsque i varie (fig. 2).

De la polaire, on déduit les courbes de variations de K_x, K_y, $\frac{K_x}{K_y}$ en fonction de i (fig. 3).

En chaque point M de la polaire, on a :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OT}$ $\quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{R}$

La polaire est le lieu des extrémités du vecteur $\vec{R}$ d'origine O.

$$\text{tg } \theta = \frac{TM}{OT} = \frac{P}{T} = \text{finesse.}$$

M et N ont même finesse.

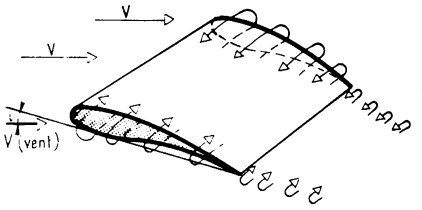
Finesse maximum = tangente à la polaire.

La polaire indique à partir de quelle valeur de l'angle d'attaque l'aile devient utilisable, à quel moment elle travaille au maximum et à quelle limite d'angle d'attaque elle devient dangereuse.

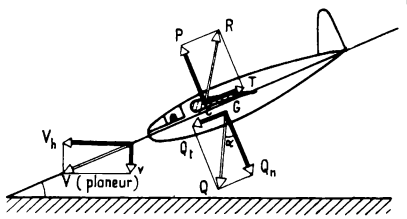
Les déplacements du centre de poussée sont déterminés par la courbe des C_m qui est sensiblement une droite.

Une bonne polaire doit être plate au voisinage de C_z maximum et ne doit pas tomber brusquement (décollement des filets d'air) ; plus la partie plate se prolonge, mieux l'avion tient aux grands angles d'attaque et aux faibles vitesses.

①



②



TRAINÉE INDUITE.

Pour une aile d'allongement limité $\left(A = \frac{L^2}{S}\right)$ l'influence des tourbillons est défavorable ; les tourbillons diminuent la finesse (fig. 1).

Pour le même coefficient de portance C_z il faut augmenter l'incidence $i = i_0 + i_1$ d'où accroissement du coefficient de traînée. $C_x = C_{x_0} + C_{x_1}$

I_1 = angle auto-induit.

c_{x_1} = coefficient de traînée induite.

Cette théorie de JOUKOWSKI, appliquée par PRANDTL est vérifiée par l'expérience

$K_x = K_{x_0} + K_{x_1}$

K_{x_0} = traînée de profil, ne dépend que de la forme du profil.

K_{x_1} = traînée induite, dépend du contour des plans, de la forme des bords, de l'allongement.

Formule de PRANDTL :

$$K_{x_1} = \frac{16K^2y}{\pi} \times \frac{S}{(kb)^2} = 5{,}1K^2y = \frac{S}{(kb)^2}.$$

k = coefficient caractérisant une voilure.

b = envergure maximum.

$i_1 = 5{,}1\ k_y \frac{S}{(k'b)^2}$ en radians ($1\ rd \simeq 57°3$).

Connaissant les résultats d'une voilure S_1, on pourra déterminer ceux d'une voilure S_2 de même profil.

$$K_x = K_{x_1} + 5{,}1\ K^2_y \left[\frac{S_1}{(k_1 b_1)^2} - \frac{S_2}{(k_2 b_2)^2}\right]$$

$$i = i_1 + 5{,}1K_y \left[\frac{S_1}{(k_1' b_1')^2} - \frac{S_2}{(k_2' b_2')^2}\right]$$

EQUATIONS FONDAMENTALES DU VOL HORIZONTAL

Condition de sustentation

$$P = Q = R_y V^2 = K_y S V^2$$

Q = poids de l'avion.

Puissance effective fournie par l'hélice :

$$\boxed{P_e = P_m \eta \frac{N}{N_0}}$$

P_m = puissance maximum du moteur.

η = rendement de l'hélice.

N = vitesse de rotation de l'hélice.

N_0 = vitesse de rotation du moteur.

Puissance nécessaire :

$$P_e = Q \frac{R_x}{R_y} V = R_x V^3$$

$$\boxed{P_m \eta \frac{N}{N_0} = Q \frac{R_x}{R_y} v}$$

DESCENTE PLANÉE

Si P devient insuffisante, l'avion descend suivant une pente d'angle α avec l'horizon.

$\vec{R} = \vec{P} + \vec{T}$ (fig. 2).

P perpendiculaire à V, et T parallèle à V.

$\vec{Q} = \vec{Q_n} + \vec{Q_t}$

Q normale à V, Q_t parallèle à V ; il faut :

$$P = -Q_n = -Q \cos \alpha$$

$$T = -Q_t = -Q \sin \alpha$$

Traction de l'hélice = $J - Q \sin \alpha$.

Lorsque $J - Q \sin \alpha = 0$, on peut arrêter le moteur, la descente se fait en vol plané.

$$Q \sin \alpha = R_x V^2 \qquad \sin \alpha = \frac{R_x V^2}{Q}$$

Variation de traînée avec l'altitude

$$T_z = C_x \frac{\varpi_z}{2g} S V_z^2 \qquad T_0 = C_x \frac{\varpi_0}{2g} S V_0^2$$

$$\frac{T_z}{T_0} = \frac{\varpi_z}{\varpi_0} \times \frac{V_z^2}{V_0^2}$$

Pour monter, il faut prendre l'incidence correspondant au minimum de puissance et la conserver, donc R_y constant, Q constant.

$$Q = C_y \frac{\varpi_z}{2g} S V^2.$$

Or ω_z diminue, il faut donc que V augmente. La portance P doit être constante.

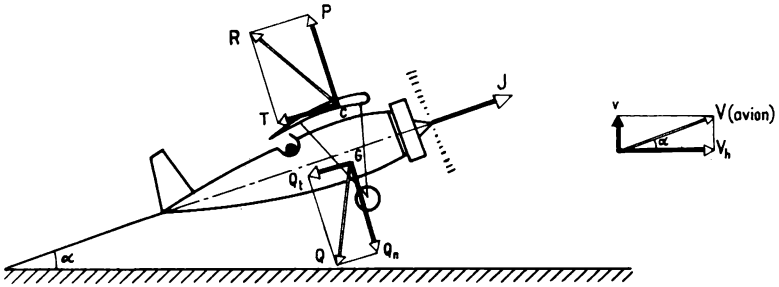
$P_z = P_0$ ou $C_y \frac{\varpi_z}{2g} S V_z^2 = C_y \frac{\varpi_0}{2g} S V_0^2$ d'où

$V_z^2 = \frac{\varpi_z}{\varpi_0} V_0^2 > V_0^2$ $\qquad \boxed{\frac{V_z}{V_0} = \sqrt{\frac{\varpi_z}{\varpi_0}}}$

$$\frac{T_z}{T_0} = \frac{\varpi_z}{\varpi_0} \times \frac{\varpi_0}{\varpi_z} = 1 \qquad \text{ou} \qquad T_z = T_0$$

A incidence constante, la traînée est indépendante de l'altitude.

①



Vitesse verticale de descente.

Vol plané : $v = V \sin \alpha$; au sol $V = \sqrt{\frac{Q}{R_y}}$

$$v = \sqrt{\frac{Q \cos \alpha}{R_y}} \sin \alpha = \sqrt{\frac{Q \cos \alpha}{R_y}} \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{P} = \frac{R_x}{R_y} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{Q \cos \alpha}{R_y}} \frac{R_x}{R_y} \cos \alpha}$$

Donc les meilleurs planeurs sont les avions légers à grande surface.

VOL ASCENDANT OU MONTÉE (fig. 1).

L'excès de puissance permet de monter grâce à J (traction de l'hélice). Il faut avoir

$$Q_n = Q \cos \alpha = R_y V^2$$

et $J = T + Q_t = R_x V^2 + Q \sin \alpha$

La puissance nécessaire est alors :

$$\mathcal{P} = JV = (R_x V^2 + Q \sin \alpha) V$$
$$= R_x V^3 + QV \sin \alpha$$

$R_x V^3 = \mathcal{P}_0$ donc $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + QV \sin \alpha$

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_0}{QV} = \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_0}{Q} \sqrt{\frac{R_y}{Q \cos \alpha}}}$$

La pente de montée croît avec l'excédent de puissance (pour un poids et une incidence donnés) ; varie en raison inverse de $Q^{\frac{3}{2}}$, proportionnelle à $\sqrt{R_y}$, donc à $\sqrt{S}$.

La vitesse de montée est :

$$v = V \sin \alpha = \sqrt{\frac{Q \cos \alpha}{R_y}} \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_0}{Q} \sqrt{\frac{R_y}{Q \cos \alpha}}$$

$$\boxed{v = \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_0}{Q}}$$

Variations de la puissance avec l'altitude.

$\mathcal{P}_0 = J_0 V_0$ $\quad \mathcal{P}_z = J_z V_z$ $\quad$ mais $J_0 = J_z$

$$V_z = V_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_z}}$$

d'où $\mathcal{P}_z = J_0 V_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_z}} = \mathcal{P}_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_z}}$

donc $\mathcal{P}_z > \mathcal{P}_0$.

La puissance nécessaire croît en raison inverse de la racine carrée du poids spécifique de l'air.

Un avion nécessitant une puissance de 1 000 *ch* au sol, demandera en vol horizontal à une altitude de 4 000 *m* une puissance

$$\mathcal{P}_{4000} = 1\,000 \sqrt{\frac{1}{0,66}} \simeq 1\,230 \text{ ch}.$$

Existence d'un plafond.

La puissance nécessaire croît avec l'altitude, mais la puissance que peut fournir le moteur décroît avec l'altitude car le volume de mélange gazeux qu'absorbe le moteur par seconde est constant pour une vitesse de rotation donnée ; lorsque Z croît, la pression H décroît, le poids du volume de mélange gazeux absorbé décroît, il en est de même de la puissance d'après la relation

$$\mathcal{P}_z = \frac{H}{760} \mathcal{P}_0.$$

A 4 000 *m*, H = 462

$$\mathcal{P}_z = \frac{462}{760} \mathcal{P}_0 \simeq 0,66 \mathcal{P}_0$$

Si $\mathcal{P}_0 = 1\,000$ *ch*, $\quad \mathcal{P}_{4000} = 660$ *ch*.

Le plafond est atteint lorsque $\mathcal{P}_z = \mathcal{P}_{max}$.

La vitesse de rotation n du moteur décroît lorsque Z croît. En montée, n diminue d'environ 10 % par rapport à la vitesse en palier et la vitesse de rotation au plafond est 85 à 90 % de ce qu'elle est au sol.

La loi de décroissance de la puissance est sensiblement

$$\boxed{\mathcal{P}_z = \frac{H}{760} \mathcal{P}_0 \frac{n_0}{n_z}}$$

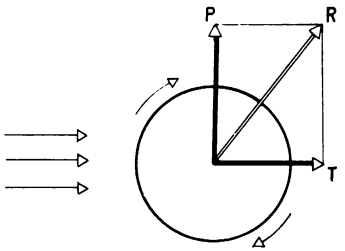
Emploi des moteurs surcomprimés.

On peut augmenter le plafond par l'emploi de moteurs surcomprimés dont le taux de compression au sol, supérieur à 5,5 (il est 7 pour l'essence à l'indice d'octane 100), est maintenu pour l'altitude d'utilisation de l'avion (ce taux baisse avec l'altitude).

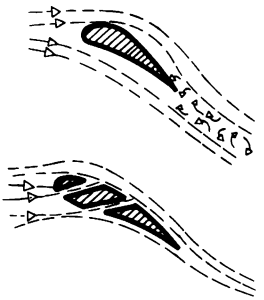
On emploie aussi des moteurs à compresseur (turbo-compresseur RATEAU) pour obtenir à l'entrée du carburateur une pression d'air égale à ce qu'elle est au sol.

AVIONS (3)

①



②



SIMILITUDE DES MAQUETTES

Au contact immédiat d'une aile, la vitesse relative du courant d'air tend à s'annuler en raison de la viscosité de l'air ; conception d'une couche limite très mince collée à l'aile, véritable tissu de petits filets tourbillonnaires créés par le frottement. Un courant d'air dans l'axe d'un corps symétrique ne peut donner qu'une traînée ; la poussée résulte d'une dissymétrie de forme ou de mouvement. La poussée vers le haut indique que la pression est plus faible au-dessus de l'aile qu'en dessous ce qui, d'après la relation de BERNOULLI, exige une vitesse plus grande sur l'extrados que sur l'intrados. Cette différence résulte d'une circulation secondaire cyclique se superposant au vent relatif et opposée à lui sous l'intrados.

Cette circulation se déduit aussi de l'existence des tourbillons dus à l'air s'échappant à plus grande vitesse par-dessus le bord de fuite ; dans un écoulement très lent (viscosité négligeable) les filets d'air contournent l'obstacle, dans le vent ordinaire la viscosité décolle les filets d'air vers le bord de fuite créant une zone tourbillonnaire qui amorce la circulation secondaire autour du profil.

La viscosité responsable des décollements jouera plus fortement aux grands angles d'attaque. Il s'ensuit qu'entre un avion et son modèle réduit les conditions de similitude dépendent de la viscosité relative. D'après la loi de REYNOLDS

$$\mathfrak{R} = \frac{VL}{\frac{\mu}{\rho}}, \qquad \text{(pour l'air } \frac{\mu}{\rho} = \text{constante).}$$

L = longueur du corps dans la direction de V.

Loi de correction :

$$R_x \text{ avion} = R_x \text{ modèle} \times \left(\frac{VL \text{ modèle}}{VL \text{ avion}}\right)^{0,15}$$

EFFET MAGNUS

On peut obtenir une poussée sur un corps symétrique en créant une dissymétrie de mouvement. Un cylindre en rotation rapide autour de son axe et placé dans le vent admettra une poussée et une traînée. C'est l'effet MAGNUS (fig. 1). Phénomène de la dérive des projectiles en rotation autour de leur axe ; courbure des trajectoires des balles de tennis coupées.

Effets de fentes et de volets.

Les filets d'air qui, jusqu'à i = 15°, adhèrent bien à l'extrados, décollent si l'incidence augmente, d'où tourbillons sur zone arrière de l'extrados et chute de portance. La fente du bord d'attaque (fig. 2) a pour effet de régulariser l'écoulement des filets d'air, de les faire adhérer au profil et d'augmenter l'angle à partir duquel se produit le décollement.

NOMBRE DE MACH

L'influence de la viscosité (nombre de Reynolds) diminue lorsque la vitesse croît et devient négligeable à partir de 800 *km/h* : C'est le domaine des vitesses transsoniques. La condition de similitude devient le rapport entre la vitesse de l'avion et celle du son : C'est le nombre de Mach.

$$M = \frac{v}{a}$$

a = célérité du son dans le milieu où la vitesse de l'avion est V indépendant de la pression, varie en raison inverse de la densité, proportionnelle à la racine carrée du binôme de dilatation.

M sans dimension, caractérise la compressibilité, varie de

M = 0,6 à M = 0.8 (800 à 1000 *km/h*).

Au-delà de M = o,8 domaine transsonique

Transsonique subsonique de M = 0,8 à M = 0,95 (1000 à 1150 *km/h*).

Transsonique proprement dit de M = 0.9 à M = 1,15 (1150 à 1350 *km/h*).

Pour M = 1 profondes perturbations dans les phénomènes aérodynamiques.

CHAIX - PARIS - 3304-Q 88-59 - Dépôt légal, 4e trimestre 1959, no 444
Dépôt légal éditeur : 4e Trimestre 1959, no 2327 - IMPRIMÉ EN FRANCE

NOUVELLE DOCUMENTATION GÉNÉRALE

DOCUMENTATION GÉNÉRALE

Doc.		Doc.	
1	Lettres et chiffres.	28	Transformations trigonométriques
2	Nombres normaux.	29 et 30	Table des sinus et cosinus.
3	Principales unités.	31 et 32	Table des tangentes et cotangentes.
4	Équivalences.	33	Degrés - Grades - Radians.
5	Arithmétique.	34	Grades.
6	Nombres premiers.	35	Triangle rectangle.
7 et 8	Nombres approchés.	36	Triangle quelconque.
9 et 10	Calcul algébrique.	37 et 38	Arc. Corde. Flèche. Segment.
11	Equations - Fonctions.	39	Circonférence (πD).
12	Equations de courbes.	40	Cercle ($\pi D^2/4$).
13	Dérivées - Primitives.	41	Surfaces planes.
14	Logarithmes décimaux.	42	Solides (à surf. développable).
15 et 16	Table des logarithmes.	43	Solides (à surf. non développable).
17 et 18	Table des carrés.	44	Centre de gravité.
19 et 20	Table des racines carrées.	45	Résistance des matériaux.
21 et 22	Table des cubes.	46	Poids des barres et tôles.
23 et 24	Table des racines cubiques.	47	Caractéristiques des produits.
25 et 26	Table des inverses.		
27	Fonctions circulaires.		

Doc 1

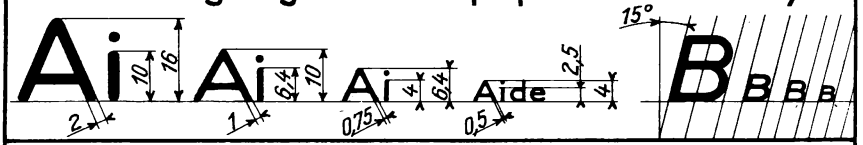
LETTRES _ CHIFFRES

β

① *Alphabet latin _* *(extrait de NF.E.04.105)*

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z



② *Alphabet grec _*

Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

α β γ δ ε ζ η θ ι χ λ μ ν ξ ο π ρ ς τ υ φ χ ψ ω

alpha bêta gamma delta epsilonn dzéta êta thêta iota kappa lambda mu nu ksi omicronn pi rô sigma tau upsilonn phi khi psi oméga

③ *Chiffres arabes _* *(extrait de NF.X.02.005).*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

RÈGLES D'ÉCRITURE	EXEMPLES
1 _ *Séparer les nombres en tranches de trois chiffres par un espace inférieur à la largeur d'un chiffre.*	
NOMBRES ENTIERS : à partir de la droite	3 850 363
NOMBRES DÉCIMAUX : à partir de la virgule	0,000 485
Exception pour les dates	2 octobre 1956
2 _ *Écrire les symboles d'unité sans point d'abréviation, ni jamais la marque du pluriel*	131,5 cm
Exceptions { *Nombres complexes*	2,75 h ou 2 h 45 mn
Exceptions { *Écritures commerciales*	F 170

④ *Chiffres romains _*

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

RÈGLES D'ÉCRITURE	EXEMPLES
1 _ *Plusieurs chiffres égaux écrits à la suite s'ajoutent*	XXX = 30
2 _ *Tout chiffre écrit à la droite d'un chiffre plus fort s'ajoute à celui-ci*	DLV = 555
3 _ *Tout chiffre écrit à la gauche d'un chiffre plus fort se retranche de celui-ci*	XC = 90
4 _ *Tout nombre surmonté d'un trait exprime des mille, de deux traits des millions*	$\overline{X}$ = 10 000

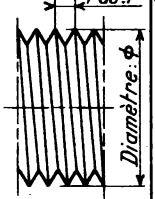
N — NOMBRES NORMAUX — Doc 2

① SÉRIES RENARD

1 à 10				10 à 100					100 à 1000						
ORDRE DE PRÉFÉRENCE				ORDRE DE PRÉFÉRENCE					ORDRE DE PRÉFÉRENCE						
1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	Valeurs exactes R 20
Valeurs recommandées			À éviter	Valeurs recommandées			Valeurs à éviter		Valeurs recommandées			Valeurs à éviter			
Ra 5	Ra 10	Ra 20		Ra 5	Ra 10	Ra 20			Ra 5	Ra 10	Ra 20				
1	1	1		10	10	10			100	100	100				100
		1,1				11					110	105			112,20
	1,2	1,2			12	12				125	125	120	115		125,89
		1,4	1,5			14	13				140	130	135		141,25
							15					150	145		
1,6	1,6	1,6		16	16	16			160	160	160		155		158,49
		1,8				18	17				180	170	165		177,83
	2	2			20	20	19			200	200	190	175		199,53
		2,2				22	21	23			220	210	185		223,87
							24					240	195		
2,5	2,5	2,5		25	25	25			250	250	250		230		251,19
		2,8				28	26				280	260	270		281,84
	3	3			32	32	30			315	315	300	290		316,23
		3,5				36	34	35			355	340	310	330	354,81
							38					380	320 330 340 350 360	370	
4	4	4		40	40	40			400	400	400		390		398,11
		4,5				45	42	44			450	420	410		446,68
	5	5			50	50	46	46		500	500	480	430	440	501,19
		5,5				56	52	55			560		460	470	562,34
							60	58					490		
6	6	6		63	63	63		62	630	630	630				630,96
		7				70	68	65			710				707,95
	8	8			80	80	75	72		800	800				794,33
		9				90	85	78			900				891,25
10	10	10		100	100	100	95	82	1000	1000	1000				1000
								88							
								92							
								98							

Dans la cotation des dessins on adopte de préférence les termes des séries Ra 5, Ra 10, Ra 20 indiqués dans le tableau ci-dessus.
Sauf pour les filetages S.I. dont les valeurs sont données ci-dessous: (Diamètre-Pas).

② SYSTÈME INTERNATIONAL DE FILETAGE



S.I.

r = 0,5	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4
3 — 0,6	6 — 1	12 — 1,75	24 — 3	48 — 5
(3,5) — 0,6	(7) — 1	14 — 2	27 — 3	52 — 5
4 — 0,75	8 — 1,25	16 — 2	30 — 3,5	56 — 5,5
(4,5) — 0,75	(9) — 1,25	18 — 2,5	33 — 3,5	60 — 5,5
5 — 0,9	10 — 1,5	20 — 2,5	36 — 4	64 — 6
(5,5) — 0,9	(11) — 1,5	22 — 2,5	39 — 4	68 — 6
6 — 1	12 — 1,75	24 — 3	42 — 4,5	72 — 6
			45 — 4,5	76 — 6
			48 — 5	80 — 6

( ) Valeurs à éviter

ϕ | P

Progr.on arithm.que

③ MASSES NORMALES DE PESÉE (1 à 1000)

1, 2 , 5, 10, 20 , 50, 100, 200 , 500, 1000

Doc 3 — PRINCIPALES UNITÉS

GRANDEUR		MKSA (Giorgi)	
① UNITÉS GÉOMÉTRIQUES			
LONGUEUR	L	*mètre*	m
SUPERFICIE	S	*mètre carré*	m^2
VOLUME	V	*mètre cube*	m^3
ANGLE		*angle droit*	D
ANGLE PLAN		*radian*	rd
ANGLE SOLIDE	Ω	*stéradian*	sd
② UNITÉ DE MASSE			
MASSE	m	*kilogramme*	kg
③ UNITÉ DE TEMPS			
TEMPS	t	*seconde*	s
④ UNITÉS MÉCANIQUES			
VITESSE	v	*mètre par seconde*	m/s
ACCÉLÉRATION	γ	*mètre par seconde par seconde*	m/s/s
VITESSE ANG.RE	ω	*radian par s*	rd/s
FORCE	F	*newton*	N
ÉNERGIE	W	*joule*	J
PUISSANCE	P	*watt*	W
PRESSION	p	*pascal*	P
⑤ UNITÉS ÉLECTRIQUES			
INTENSITÉ	i	*ampère*	A
FORCE ÉLECTROMOTRICE	e	*volt*	V
RÉSISTANCE	R	*ohm*	Ω
QUANTITÉ	Q	*coulomb*	C
⑥ UNITÉS CALORIFIQUES			
TEMPÉRATURE	t	*degré*	°C
QUANTITÉ	Q	*joule*	J
⑦ UNITÉS OPTIQUES			
INTENSITÉ		*bougie nouvelle*	B
FLUX		*lumen nouveau*	lu
ÉCLAIREMENT		*lux nouveau*	lx

UNITÉS MÉCANIQUES
autorisées à titre provisoire

FORCE

kgp = *kilogramme-poids*.
kgf = *kilogramme-force*.
kgp = kgf = 9,81 N

ÉNERGIE ou TRAVAIL

kgm = *kilogrammètre*.
kgm = 9,81 J

PUISSANCE

ch = *cheval-vapeur*.
ch = 75 kgm/s = 736 W

PRESSION

kgf/cm^2 = 0,98 bar = 98.10^3 P

La pression atmosphérique normale de 760 mm de mercure correspond à 1,013 bar ou à 1,03 kgf/cm^2

Les électriciens emploient pour mesurer les puissances apparentes le volt-ampère (VA) *et son multiple le kilovolt-ampère* (kVA).

L'unité légale de quantité est la thermie (th) = *1000 kcal*. *La kilocalorie* (kcal) *permet d'élever 1 dm^3 d'eau de 1°C*.

lu = *flux de* 1B *par stéradian*.
lx = *éclairement* 1lu *par* m^2.

ÉQUIVALENCES DES UNITÉS

PUISSANCE	W	kW	kgm/s	ch	ÉNERGIE	J	Wh	kgm	kcal
W =	1	0,001	0,102	0,001 36	J =	1	0,000 28	0,102	0,24
kW =	1000	1	102	1,36	Wh =	3600	1	367	0,860
kgm/s =	9,81	0,009 81	1	0,133	kgm =	9,81	0,002 7	1	0,002 3
ch =	736	0,736	75	1	kcal =	4180	1,155	427	1

CONVERSION DES PRINCIPALES UNITÉS

	FORCE	ÉNERGIE	PUISSANCE	PRESSION
MKSA	N = kgf : 9,81	J = kgm : 9,81	W = kgm/s : 9,81	P = kgf/m^2 : 9,81
MTS	*sthène* = 10^3 N	*kilojoule* = 10^3 J	*kilowatt* = 10^3 W	*pièze* = 10^3 P
CGS	*dyne* = 10^{-5} N	*erg* = 10^{-7} J	*erg/seconde* = 10^{-7} W	*barye* = 10^{-1} P

ÉQUIVALENCES

Doc 4

① SYMBOLES

extrait de FD.X 02.005

Symbole	SIGNIFICATION	Symbole	SIGNIFICATION	Symbole	SIGNIFICATION
+	*plus*	≠	*différent de*	l, L	*longueur*
−	*moins*	≃	*égal environ à*	r, R	*rayon*
±	*plus ou moins*	∼	*équivalent à*	d, D	*diamètre*
× *ou* •	*multiplié par*	=	*égal*	$\overset{\frown}{AOB}$	*angle*
: *ou* /	*divisé par*	<	*inférieur à*	$\overset{\frown}{AOB}$	*arc*
%	*pour cent*	≤	*ou au plus égal à*	sin	*sinus*
‰	*pour mille*	>	*supérieur à*	cos	*cosinus*
a^2	*puiss.ce exposant 2*	≥	*ou au moins égal à*	tg	*tangente*
a^n	*puiss.ce exposant n*	↗	*croît*	cotg	*cotangente*
a_n	*indice n*	↘	*décroît*	π	*3,1416*
$\sqrt{a}$	*racine carrée*	∥	*parallèle*	h	*hauteur*
$\sqrt[n]{a}$	*racine n ième*	⊥	*perpendiculaire*	etc..	*et la suite*

Nota – *Le signe "multiplié par" entre deux nombres (×); entre deux lettres (•)*

② TABLEAU DES PRÉFIXES

FACTEUR *par lequel est multiplié l'unité*	SYMBOLE	PRÉFIXE	EXEMPLES D'UTILISATION
10^3 ou 1 000	k	*kilo*	kg ____ *kilogramme*
10^2 ou 100	h	*hecto*	hm ____ *hectomètre*
10^1 ou 10	da	*déca*	dag ____ *décagramme*
10^0 ou 1			
10^{-1} ou 0,1	d	*déci*	dm ____ *décimètre*
10^{-2} ou 0,01	c	*centi*	cm ____ *centimètre*
10^{-3} ou 0,001	m	*milli*	mm ____ *millimètre*
10^{-4} ou 0,000 1	dm	*décimilli*	dmm ____ *décimillimètre*
10^{-5} ou 0,000 01	cm	*centimilli*	cmm ____ *centimillimètre*
10^{-6} ou 0,000 001	µm	*micro*	µm ____ *micromètre*

Nota – *Micromètre (µm) s'écrit (µ) micron* –

③ CONVERSION DES FRACTIONS DE POUCE EN mm

fr. de pouce	mm	fr. de pouce	mm	fr. de pouce	mm	fr. de pouce	mm
1/32	0,79	9/32	7,14	17/32	13,49	25/32	19,84
1/16	1,59	5/16	7,94	9/16	14,29	13/16	20,64
3/32	2,38	11/32	8,73	19/32	15,08	27/32	21,43
1/8	3,17	3/8	9,52	5/8	15,87	7/8	22,22
5/32	3,97	13/32	10,32	21/32	16,67	29/32	23,02
3/16	4,76	7/16	11,11	11/16	17,46	15/16	23,81
7/32	5,56	15/32	11,91	23/32	18,26	31/32	24,60
1/4	6,35	1/2	12,70	3/4	19,05	1 pouce = 25,4 mm	

Doc 5

ARITHMÉTIQUE

TERMINOLOGIE DES NOMBRES

PARTIE ENTIÈRE | **PARTIE DÉCIMALE**

classe des milliards	classe des millions		classe des mille		classe des unités						
4	1	2	3	8	3	9	5	4	4 ,	8	7	0	8	4	1
unités de milliard	centaines de million	dizaines de million	unités de million	centaines de mille	dizaines de mille	unités de mille	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	dix-millièmes	cent-millièmes	millionièmes

ADDITION ① +	SOUSTRACTION ② −	MULTIPLICATION ③ ×	DIVISION ④ :
Ex. 128,75 + 3,42 = 132,17	*Ex.* 128,75 − 3,42 = 125,33	*Ex.* 1,5 × 0,03 = 0,045 ; 15 × 3 = 45	*Ex.* 2,4 : 0,12 → 240 | 12 ; 000 | 20
Aligner les virgules verticalement.	*Aligner les virgules verticalement.*	*Multiplier les nombres. Placer la virgule.*	*Équilibrer les décimales. Diviser.*

⑤ CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

		EXEMPLES
Par 2	*Terminé à droite par 0 ou un chiffre pair.*	20 ; 238
Par 5	*Terminé à droite par 0 ou 5.*	320 ; 45
Par 3	*Somme des chiffres divisible par 3.*	39 ; 1434
Par 9	*Somme des chiffres divisible par 9.*	36 ; 8073

FRACTIONS

⑥ SIMPLIFICATION

$\frac{45}{60} = \frac{15}{20} = \dots\dots\dots\dots = \frac{3}{4}$

Diviser les deux termes par le même nombre.

⑦ RÉDUCTION AU MÊME DÉNOMINATEUR

$\frac{5}{8} = \frac{5\times3}{8\times3} = \frac{15}{24}$ *et* $\frac{7}{6} = \frac{7\times4}{6\times4} = \frac{28}{24}$

Prendre pour dénominateur commun un nombre divisible par tous les dénominateurs.

⑧ ADDITION	⑨ SOUSTRACTION	⑩ MULTIPLICATION	⑪ DIVISION
Ex. $\frac{9}{16} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16} + \frac{4}{16} = \frac{13}{16}$	*Ex.* $\frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	*Ex.* $\frac{3}{8} \times \frac{2}{15} = \frac{3\times2}{8\times15} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$	*Ex.* $\frac{3}{5} : \frac{4}{15} = \frac{3\times15}{5\times4} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$
Réduire au même dénominateur. Additionner les numérateurs.	*Réduire au même dénominateur. Soustraire les numérateurs.*	*Multiplier entre eux les numérateurs, puis les dénominateurs. Simplifier si possible.*	*Multiplier la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur.*

PGCD PPCM

NOMBRES PREMIERS

Doc 6

① LISTE DES NOMBRES PREMIERS

1	137	317	523	743	977	1213	1453	1693	1951	2213	2447	2713
2	139	331	541	751	983	1217	1459	1697	1973	2221	2459	2719
3	149	337	547	757	991	1223	1471	1699	1979	2237	2467	2729
5	151	347	557	761	997	1229	1481	1709	1987	2239	2473	2731
7	157	349	563	769	1009	1231	1483	1721	1993	2243	2477	2741
11	163	353	569	773	1013	1237	1487	1723	1997	2251	2503	2749
13	167	359	571	787	1019	1249	1489	1733	1999	2267	2521	2753
17	173	367	577	797	1021	1259	1493	1741	2003	2269	2531	2767
19	179	373	587	809	1031	1277	1499	1747	2011	2273	2539	2777
23	181	379	593	811	1033	1279	1511	1753	2017	2281	2543	2789
29	191	383	599	821	1039	1283	1523	1759	2027	2287	2549	2791
31	193	389	601	823	1049	1289	1531	1777	2029	2293	2551	2797
37	197	397	607	827	1051	1291	1543	1783	2039	2297	2557	2801
41	199	401	613	829	1061	1297	1549	1787	2053	2309	2579	2803
43	211	409	617	839	1063	1301	1553	1789	2063	2311	2591	2819
47	223	419	619	853	1069	1303	1559	1801	2069	2333	2593	2833
53	227	421	631	857	1087	1307	1567	1811	2081	2339	2609	2837
59	229	431	641	859	1091	1319	1571	1823	2083	2341	2617	2843
61	233	433	643	863	1093	1321	1579	1831	2087	2347	2621	2851
67	239	439	647	877	1097	1327	1583	1847	2089	2351	2633	2857
71	241	443	653	881	1103	1361	1597	1861	2099	2357	2647	2861
73	251	449	659	883	1109	1367	1601	1867	2111	2371	2657	2879
79	257	457	661	887	1117	1373	1607	1871	2113	2377	2659	2887
83	263	461	673	907	1123	1381	1609	1873	2129	2381	2663	2897
89	269	463	677	911	1129	1399	1613	1877	2131	2383	2671	2903
97	271	467	683	919	1151	1409	1619	1879	2137	2389	2677	2909
101	277	479	691	929	1153	1423	1621	1889	2141	2393	2683	2917
103	281	487	701	937	1163	1427	1627	1901	2143	2399	2687	2927
107	283	491	709	941	1171	1429	1637	1907	2153	2411	2689	2939
109	293	499	719	947	1181	1433	1657	1913	2161	2417	2693	2953
113	307	503	727	953	1187	1439	1663	1931	2179	2423	2699	2957
127	311	509	733	967	1193	1447	1667	1933	2203	2437	2707	2963
131	313	521	739	971	1201	1451	1669	1949	2207	2441	2711	2969

— Les nombres premiers ne sont divisibles que par eux-mêmes et par l'unité.
Exemple : le nombre 23 n'est divisible que par 23 et par 1.

② FACTEURS PREMIERS ET DIVISEURS D'UN NOMBRE

198	2
99	3
33	3
11	11
1	

Essayer les divisions par tous les nombres premiers en commençant par les plus petits.

$198 = 2 \times 3^2 \times 11$

198	2	1
99	3	2
33	3	3_6
11	11	9_18
1		11_22_33_66_99_198

Écrire le diviseur 1, puis multiplier chaque facteur par tous les diviseurs déjà écrits.

③ PGCD

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

PGCD = *Produit des facteurs communs affectés de leur plus petit exposant.*

Soient les nombres **1488** *et* **360**

$$\begin{cases} 1488 = 2^4 \times 3 \times 31 \\ 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \end{cases}$$

$PGCD = 2^3 \times 3 = 24$

④ PPCM

PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

PPCM = *Produit des facteurs communs et non communs affectés de leur plus fort exposant.*

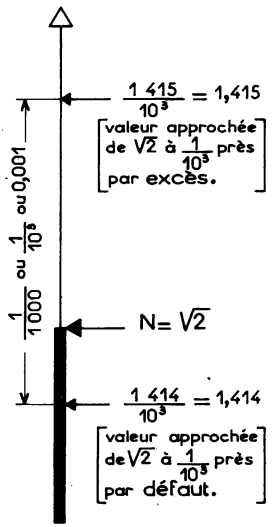
Soient les nombres **600** *et* **175**

$$\begin{cases} 600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \\ 175 = 5^2 \times 7 \end{cases}$$

$PPCM = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 4\,200$

Doc 7 — NOMBRES APPROCHÉS

①



VALEURS APPROCHÉES à $\frac{1}{10^n}$ près D'UN NOMBRE DÉCIMAL ILLIMITÉ

Ce sont les deux multiples de $\frac{1}{10^n}$ qui encadrent ce nombre.

Exemple: Le nombre illimité $\sqrt{2} = 1{,}414\,21\ldots$. a pour valeurs approchées à $\frac{1}{10^3}$ près (0,001 près):

par défaut	par excès
1,414	1,415

La valeur par défaut (1,414) s'appelle aussi: valeur de $\sqrt{2}$ avec 3 décimales exactes.

ERREUR ABSOLUE

Erreur commise quand on remplace un nombre N par une valeur approchée A.

$A - N = e_a$ ou ΔN (s'énonce delta N)

En général ΔN:
- est inconnue, mais sa limite supérieure est connue;
- s'exprime par une puissance de 10;
- est inférieure à $\frac{1}{10^n}$ si A remplace N à $\frac{1}{10^n}$ près.

Exemple: $\sqrt{2} - 1{,}414 < 0{,}001$ et $1{,}415 - \sqrt{2} < 0{,}001$

②

Exemple:
$7{,}522\,3 < N < 7{,}523\,1$
Valeur approchée moyenne de N
$= \frac{7{,}522\,3 + 7{,}523\,1}{2}$
$= 7{,}522\,7$
avec $e_a < 0{,}004$.

VALEUR APPROCHÉE MOYENNE

C'est la moyenne arithmétique (ou demi-somme) des valeurs approchées extrêmes.

Si $A < N < B$,
la valeur approchée moyenne est $\frac{A+B}{2}$,
avec $\Delta N < \frac{B-A}{2}$.

③

Exemple:
Soit $\sqrt{6} = 2{,}449\,49\ldots$
donc

$= 2{,}449$	$= 2{,}4495$
avec $\Delta N < \frac{1}{2\,000}$	avec $\Delta N < \frac{1}{20\,000}$

SUPPRESSION DE DÉCIMALES

Si l'on supprime les décimales qui suivent la $n^{ème}$:
- l'erreur $\Delta N <$ 1 unité du dernier ordre conservé, soit $\Delta N < \frac{1}{10^n}$;
- en prenant soin de forcer la $n^{ème}$ quand elle est égale ou supérieure à 5, on a: $\Delta N <$ demi-unité du dernier ordre conservé, soit $\Delta N < \frac{1}{2 \times 10^n}$.

④

Exemple:

Pour $N = 25{,}385$ avec $e_a = \frac{1}{10^3}$

$e_r = \frac{1}{10^3} : 10 = \frac{1}{10^4}$

ERREUR RELATIVE

L'erreur relative e_r est le quotient de l'erreur absolue e_a par le nombre exact N:

$e_r = \frac{e_a}{N}$ ou $e_r = \frac{\Delta N}{N}$

On prend: $e_r = \frac{\text{valeur par excès de l'erreur absolue}}{\text{valeur par défaut du nombre N}}$.

Exemple:

$N = 0{,}071\,2$ avec $e_r = \frac{1}{10^4}$

$e_a = \frac{1}{10^4} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^5}$

Inversement: $e_a = e_r \cdot N$

On prend: e_a = produit des valeurs par excès de e_r et N

L'erreur relative indique la précision d'une mesure.

NOMBRES APPROCHÉS

Doc. 8

① SOMME

$N = A + B + \dots$

Erreur absolue ΔN = Somme des erreurs absolues $\Delta A, \Delta B \dots$

$$\Delta N = \Delta A + \Delta B \dots$$

Exemple:

$A = 3{,}714 \quad \Delta A = 0{,}001$

$B = 2{,}054 \quad \Delta B = 0{,}001$

$C = 8{,}955 \quad \Delta C = 0{,}001$

$N = A+B+C = 14{,}723$ avec $\Delta N = 0{,}003$ ou $\Delta N < 0{,}01$

$N = 14{,}72$ à moins de $0{,}01$ près

② DIFFÉRENCE

$N = A - B$

Exemple:

$A = 8{,}1256 \quad \Delta A = 0{,}0001$

$B = 3{,}4822 \quad \Delta B = 0{,}0001$

$N = A - B = 4{,}6434$ avec $\Delta N = 0{,}0002$ ou $\Delta N < 0{,}001$

$N = 4{,}643$ à moins de $0{,}001$ près

③ PRODUIT

$N = A \times B \times \dots$

Erreur relative $\frac{\Delta N}{N}$ = Somme des erreurs relatives $\frac{\Delta A}{A}, \frac{\Delta B}{B} \dots$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \dots$$

Exemple:

$A = 3{,}142 \quad \Delta A = 0{,}001 ; \frac{\Delta A}{A} = \frac{0{,}001}{1}$

$B = 0{,}548 \quad \Delta B = 0{,}001 ; \frac{\Delta B}{B} = \frac{0{,}001}{0{,}5}$

$N = A \times B = 1{,}721\,816$ avec $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}003$ ou $\Delta N < 0{,}01$

$N = 1{,}72$ à moins de $0{,}01$ près

④ QUOTIENT

$N = \frac{A}{B}$

Exemple:

$A = 2{,}23 \quad \frac{\Delta A}{A} = 0{,}01$

$B = 0{,}87 \quad \frac{\Delta B}{B} = \frac{0{,}01}{0{,}5} = 0{,}02$

$N = \frac{A}{B} = 2{,}563\,2$ avec $\Delta N = 0{,}03$ ou $\Delta N < 0{,}1$

$N = 2{,}6$ à moins de $0{,}1$ près

⑤ PUISSANCE

$N = A^m$

Erreur relative = Produit de $\frac{\Delta A}{A}$ par m

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta A}{A} \times m$$

Exemple:

$A = 0{,}682 ; \Delta A = 0{,}001 ; \frac{\Delta A}{A} = \frac{0{,}001}{0{,}5} = 0{,}002$

$N = A^2 = 0{,}465\,124$ avec $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}004$ ou $\Delta N < 0{,}01$

$N = 0{,}47$ à moins de $0{,}01$ près

⑥ RACINE

$N = \sqrt[m]{A}$

Erreur relative = Quotient de $\frac{\Delta A}{A}$ par m

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta A}{A} : m$$

Exemple:

$A = \pi = 3{,}1416$ avec $\frac{\Delta A}{A} = 0{,}0001$

$N = \sqrt{A} = 1{,}772\,45$ avec $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}000\,05$ ou $\Delta N < 0{,}0001$

$N = 1{,}772\,5$ à moins de $0{,}0001$ près

CONSEILS PRATIQUES

Pour simplifier le langage on dit: "l'erreur absolue" au lieu de "la limite supérieure de l'erreur absolue".

•

• •

Prendre tous les termes d'une somme, ou d'une différence, avec le même nombre de décimales.

•

• •

Lorsqu'une somme ne comporte pas plus de dix termes, supprimer le dernier chiffre du résultat (en forçant s'il y a lieu l'avant-dernier)

•

Même conseil pour différence de deux nombres.

•

• •

Prendre les facteurs d'un produit avec le même nombre de décimales. Conserver, au résultat, une décimale de moins que n'en comporte chaque facteur.

•

Même conseil pour le quotient de deux nombres.

•

• •

Quand on doit calculer une valeur comprise entre deux nombres d'une table numérique (interpolation), le résultat ne peut pas être donné avec un plus grand nombre de décimales que la table n'en comporte.

Doc 9 — CALCUL ALGÉBRIQUE

① PUISSANCES

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$\left(a^m \times b^n \times c^p\right)^r = a^{mr} \times b^{nr} \times c^{pr}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

② RACINES

$$\sqrt[m]{a \times b \times c} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

Application:
Rendre rationnelles les fractions:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \qquad \frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}} = \frac{A\left(\sqrt{B} \mp \sqrt{C}\right)}{B-C}$$

③ EXPOSANTS FRACTIONNAIRES

Définition: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Mêmes règles que pour ①
Exemples:

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}}$$

$$a^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{a^7}$$

④ EXPOSANTS NÉGATIFS

Définition: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Mêmes règles que pour ①
Exemples:

$$a^{-m} \times a^{-n} = a^{-(m+n)}$$

$$a^{-2} \times a^{-4} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

⑤ LES PUISSANCES DE 10

0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000
$10^{-n} \ldots$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	$10^{3} \ldots 10^{n}$

$10^4 \times 10^3 = 10^7$
$10^5 \times 10^{-2} = 10^3$
$10 \times 10^{-5} = 10^{-4}$

$10^7 : 10^2 = 10^5$
$10 : 10^4 = 10^{-3}$
$10^2 : 10^{-3} = 10^5$

$(10^{-3})^2 = 10^{-6}$
$(10^4)^{-3} = 10^{-12}$
$\sqrt[2]{10^{-8}} = 10^{-4}$

⑥ PERMUTATIONS

de 3 objets a, b, c

a b c	a c b	$P_3 = 6$
b a c	b c a	
c a b	c b a	

Pour m objets:

$P_m = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times m = m!$ *(se lit factorielle m)*

Ex: $P_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$
$P_7 = 1 \times 2 \ldots \times 7 = 5040$

⑦ ARRANGEMENTS

de 3 objets a, b, c pris 2 à 2

a b	b a	c a	$A_3^2 = 6$
a c	b c	c b	

Pour m objets pris p à p:

$A_m^p = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)$

Ex: $A_3^2 = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

⑧ COMBINAISONS

de 3 objets a, b, c pris 2 à 2

a b	a c	b c	$C_3^2 = 3$

Pour m objets pris p à p:

$C_m^p = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p!}$

Ex: $C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$

CALCUL ALGÉBRIQUE

Doc 10

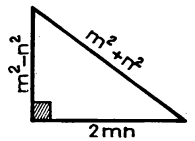
① IDENTITÉS REMARQUABLES

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$(a+b+c\ldots)^2 = \Sigma a^2+2\Sigma ab$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$
$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4-b^4$$
$$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) = a^5-b^5$$

② APPLICATIONS

Triangles rectangles dont les trois côtés sont des nombres entiers.



En effet : $(m^2+n^2)^2 = (m^2-n^2)^2+(2mn)^2$

car : $m^4+2m^2n^2+n^4 = m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2$

Exemple:	Exemple:
$m=2$; $n=1$	$m=3$; $n=2$
$5^2 = 3^2+4^2$	$13^2 = 5^2+12^2$
Exemple:	**Exemple:**
$m=7$; $n=3$	$m=13$; $n=6$
$58^2 = 40^2+42^2$	$205^2 = 133^2+156^2$

③ DÉVELOPPEMENT DE $(a+b)^m$

TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL

	Coefficients						
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
$(a+b)$ ⇒	1	1					
$(a+b)^2$ ⇒	1	2	1				
$(a+b)^3$ ⇒	1	3	3	1			
$(a+b)^4$ ⇒	1	4	6	4	1		
$(a+b)^5$ ⇒	1	5	10	10	5	1	
$(a+b)^6$ ⇒	1	6	15	20	15	6	1

$$(a+b)^m = c_1a^m+c_2a^{m-1}b+c_3a^{m-2}b^2\ldots+c_{m+1}b^m$$

Pour écrire les coefficients $c_1, c_2, c_3\ldots$, on dresse un tableau (Triangle de Pascal). Chaque nombre est la somme de deux nombres de la ligne précédente: celui qui est au-dessus et celui qui est immédiatement à gauche.

Exemple : 4e ligne du triangle de PASCAL.

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

④ PROGRESSIONS

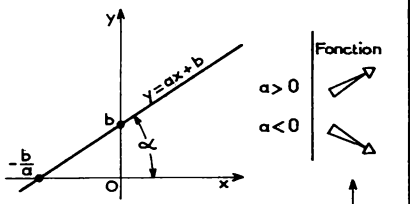
ARITHMÉTIQUE $a, a+r, a+2r, a+3r\ldots$	ℓ = terme de rang n r = raison | q = raison S = somme des n premiers termes	GÉOMÉTRIQUE $a, aq, aq^2, aq^3\ldots$
$\ell = a+(n-1)r$	Terme de rang n	$\ell = aq^{n-1}$
$S = \frac{(a+\ell)n}{2}$	Somme des n premiers termes	$S = \frac{\ell q-a}{q-1} = a\frac{q^n-1}{q-1}$ Limite $S\left\{\begin{matrix}\text{si}\\ \text{pour } n=\infty\end{matrix}\ q\neq 1\right\} = \frac{a}{1-q}$
$r = \frac{b-a}{n}$	Insertion de $(n-1)$ moyens entre a et b	$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$
Somme des n premiers nombres entiers $= \frac{n(n+1)}{2}$	Somme des n premiers nombres impairs $= n^2$	Somme des carrés des n premiers nombres entiers $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Doc 11 — ÉQUATIONS – FONCTIONS

① PREMIER DEGRÉ

Equation à 1 inconnue $(a \neq 0)$
$ax+b=0$ Racine $x = -\frac{b}{a}$

Fonction $y=ax+b$ *(linéaire)*



$tg\alpha = a$ *(coeff. ang.) si mêmes échelles*

Droites parallèles

$\alpha = \alpha'$
$tg\alpha = tg\alpha'$
$\boxed{a = a'}$

Ex. $\begin{cases} y=2x+5 \\ y=2x-4 \end{cases}$

Droites perpendiculaires

$|\alpha - \alpha'| = 90°$
$tg\alpha \cdot tg\alpha' = -1$
$\boxed{a \cdot a' = -1}$

Ex. $\begin{cases} y=3x-1 \\ y=-\frac{x}{3}+5 \end{cases}$

Droite (coeff. a) passant par $(x_0 y_0)$

$\boxed{y-y_0 = a(x-x_0)}$

Ex. $\begin{cases} x_0=2 \text{ , } y_0=-5 \\ a=4 \\ y+5=4(x-2) \end{cases}$

Droite passant par $(x_0 y_0)$ et $(x_1 y_1)$

$\boxed{\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}$

Ex. $\begin{cases} x_0=2 \text{ , } y_0=-4 \\ x_1=5 \text{ , } y_1=7 \\ \frac{y+4}{x-2} = \frac{7+4}{5-2} \end{cases}$

Système de 2 équations à 2 inconnues

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

1er cas	2ème cas
$ab'-ba' \neq 0$	$ab'-ba'=0$
$x = \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$	$cb'-bc' \neq 0$ Impossibilité *(droites parallèles)*
$y = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$	$cb'-bc'=0$ Indétermination *(droites confondues)*

x et y : coordonnées du point d'intersection des deux droites

② SECOND DEGRÉ

Equation à 1 inconnue $(a \neq 0)$
$ax^2+bx+c=0$

1er Cas $b^2-4ac > 0$

Deux racines x' et x'' $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

$x'+x'' = -\frac{b}{a}$ $\quad x'x'' = \frac{c}{a}$

Ex. $5x^2-12x+4=0$
$b^2-4ac = 144-80 = 64 > 0$
$x = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{12 \pm 8}{10}$

Rép. : $x'=2$; $x''=0,4$

2ème Cas $b^2-4ac<0$

Pas de racine

Ex. $7x^2+8x+3=0$
$b^2-4ac = 64-84 = -20 < 0$

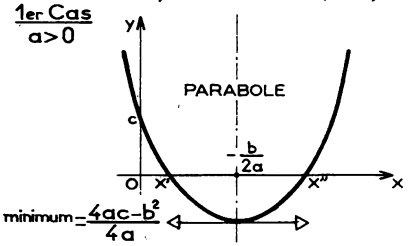
3ème Cas $b^2-4ac=0$
Une racine $x = -\frac{b}{2a}$

Ex. $4x^2-20x+25=0$
$b^2-4ac = 400-400 = 0$
$x = 20:8$

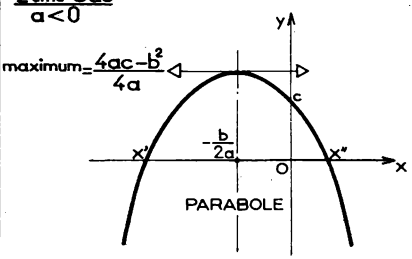
Rép. : $x=2,5$

Fonction $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$

1er Cas $a>0$



2ème Cas $a<0$

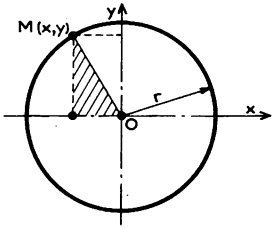


x' et x'' racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$ (cas où $b^2-4ac>0$)

ÉQUATIONS DE COURBES

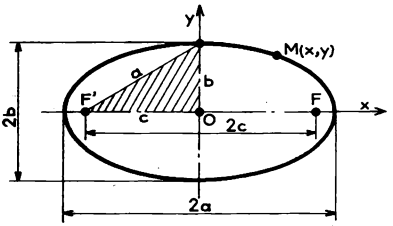
Doc 12

CERCLE



$$x^2+y^2-r^2=0$$

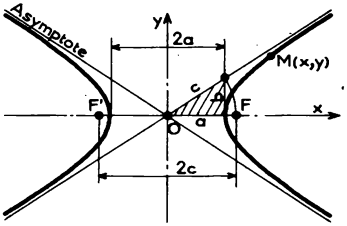
ELLIPSE



$$c^2=a^2-b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

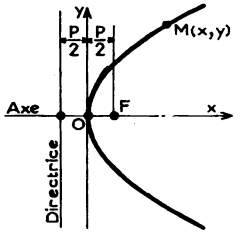
HYPERBOLE



$$c^2=a^2+b^2$$

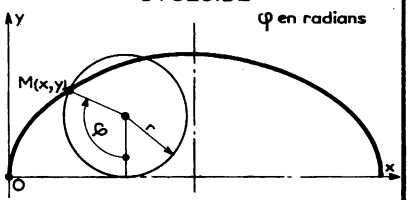
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

PARABOLE



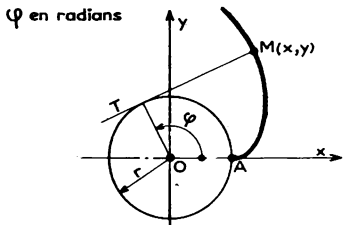
$$y^2=2px$$

CYCLOÏDE



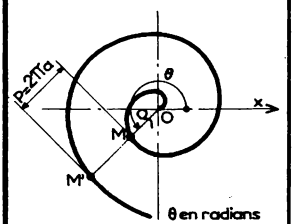
$$x=r(\varphi-\sin\varphi)$$
$$y=r(1-\cos\varphi)$$

DÉVELOPPANTE DE CERCLE



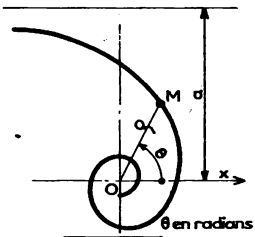
$$x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)$$
$$y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$$

SPIRALE d'Archimède
(à pas constant)



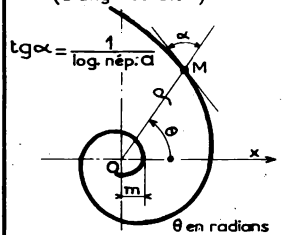
$$\rho=a\theta$$

SPIRALE. hyperbolique



$$\rho=\frac{a}{\theta}$$

SPIRALE logarithmique
(à angle constant)



$$\rho=ma^{\theta}$$

Doc 13 — DÉRIVÉES _ PRIMITIVES

① DÉFINITIONS

y = fonction de la variable x

Δy, accroissement de la fonction y pour accroissement Δx de la variable x

Dérivée $y' =$ limite $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, pour $\Delta x \to 0$

y' est la fonction dérivée de y
y est une fonction primitive de y'

Exemple: $y = x^2$

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$

$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

$y' = 2x$ (pour $\Delta x \to 0$)

x^2 a pour dérivée $2x$

x^2 est une primitive de $2x$

Notation:
Une primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$, ou intégrale indéfinie de $f(x)$, s'écrit:

$F(x) = \int f(x)\,dx$

se lit:

Somme de $f(x)dx$

② FORMULES USUELLES

PRIMITIVE $F(x)$	FONCTION $f(x)$	DÉRIVÉE $f'(x)$
$x + C$	1	0
$\frac{x^2}{2} + C$	x	1
$\frac{x^3}{3} + C$	x^2	$2x$
$\frac{x^4}{4} + C$	x^3	$3x^2$
$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ (pour $m \neq -1$)	x^m	mx^{m-1}
$Lx + C$ (log. nép.)	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	Lx (log. nép.)	$\frac{1}{x}$
$-\cos x + C$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x + C$	$\cos x$	$-\sin x$
(C est une constante)	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ ou $1 + \operatorname{tg}^2 x$

③ FONCTION COMPOSÉE de plusieurs fonctions de x telles que $u, v, w\ldots$

	DÉRIVÉE
$u + v + w$	$u' + v' + w'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^m	$mu^{m-1}u'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

④ FONCTION de fonction de x

$y = f_1(u)$, $u = f_2(v)$, $v = f_3(x)$

DÉRIVÉE: $y'_x = y'_u \times u'_v \times v'_x$

Exemple (variable t):

$y = R\sin(\omega t + \varphi)$

y est fonction de $(\omega t + \varphi)$ et $(\omega t + \varphi)$ est fonction de t

Posons:

$\begin{cases} s = \omega t + \varphi \\ y = R\sin s \end{cases}$

Calculons:

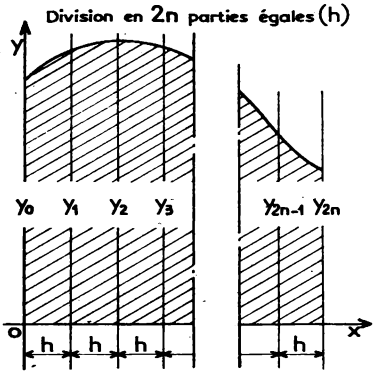
$y'_t = R\cos s \times s'$

ou

$y'_t = R\omega\cos(\omega t + \varphi)$

⑤ QUADRATURES APPROCHÉES

Division en $2n$ parties égales (h)



MÉTHODE DES TRAPÈZES

$$S = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_1 + y_2 \cdots \cdots + y_{2n-1})\right]$$

MÉTHODE DE SIMPSON

$$S = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 \cdots + y_{2n-1})\right]$$

MÉTHODES DE PONCELET ET DE PARMENTIER

$$S_i = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_{2n} - y_1 - y_{2n-1} + 4(y_1 + y_3 + y_5 \cdots + y_{2n-1})\right]$$

$$S_e = 2h(y_1 + y_3 + y_5 \cdots \cdots + y_{2n-1})$$

Méthode de Poncelet: $S = \dfrac{S_e + S_i}{2}$

Méthode de Parmentier: $S = \dfrac{2S_e + S_i}{3}$

log LOGARITHMES DÉCIMAUX — Doc 14

DÉFINITION DU LOGARITHME n de N : L'ÉGALITÉ $N = 10^n$ ← ENTRAÎNE → L'ÉGALITÉ $n = \log N$

① LOGARITHMES DES PUISSANCES DE 10

Puissances de 10	0,001 ou 10^{-3}	0,01 ou 10^{-2}	0,1 ou 10^{-1}	1 ou 10^{0}	10 ou 10^{1}	100 ou 10^{2}
Logarithmes correspondants	−3	−2	−1	0	1	2

② RECHERCHE DU LOGARITHME D'UN NOMBRE N

LA CARACTÉRISTIQUE (partie entière)

EST ⊕ (si N>1) ou ⊖ (si N<1)

Ne se lit pas dans la table

1°) Si N est plus grand que 1 : *compter le nombre de ses chiffres avant la virgule et retrancher 1.* *(la caractéristique est positive ⊕)*

log 9315 = 3,..... (4−1=3)
log 125212 = 5,..... (6−1=5)
log 3,47 = 0,..... (1−1=0)

2°) Si N est plus petit que 1 : *lire le rang occupé par le premier chiffre significatif après la virgule* *(la caractéristique est négative ⊖)*

log 0,078 = $\overline{2}$,..... (2ème rang)
log 0,00098 = $\overline{4}$,..... (4ème rang)

LA MANTISSE (partie décimale)

EST TOUJOURS ⊕

Se lit dans la table

1°) Nombre de 3 chiffres (100 à 999):

log 515 = 2,71181

2°) Nombre de 2 chiffres ou nombre de 1 chiffre :

log 70 = 1,84510 *(lire à 700)*
log 5 = 0,69897 *(lire à 500)*

3°) Nombre de plus de 3 chiffres :

log 5314 = 3,72509 *(lire à 531)*
log 18967 = 4,27875 *(lire à 190)*

③ RECHERCHE DU NOMBRE DONT ON CONNAIT LE LOGARITHME

EXEMPLES	LOGARITHME DONNÉ	LECTURE MANTISSE *(dans la table)*	NOMBRE DE CHIFFRES:	N NOMBRE CHERCHÉ
Caractéristique positive	4,92221	836 *(lire à 92221)*	avant la virgule 5 *(caract.+1=4+1)*	83 600
Caractéristique négative	$\overline{2}$,75082	563 *(lire à 75082)*	rang du 1er chiffre après la virgule 2 *(caract.)*	0,0563

CORRESPONDANCE DES OPÉRATIONS

	SUR LES NOMBRES		SUR LES LOGARITHMES	
×	MULTIPLICATION	↔	ADDITION	+
:	DIVISION	↔	SOUSTRACTION	−
$()^p$	PUISSANCE	↔	MULTIPLICATION	×
$\sqrt[n]{}$	RACINE	↔	DIVISION	:

Doc 15

LOGARITHMES

MANTISSES DES NOMBRES DE 100 à 499

log

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10.	000 00	004 32	008 60	012 84	017 03	021 19	025 31	029 38	033 42	037 43
11.	041 39	045 32	049 22	053 08	056 90	060 70	064 46	068 19	071 88	075 55
12.	079 18	082 79	086 36	089 91	093 42	096 91	100 37	103 80	107 21	110 59
13.	113 94	117 27	120 57	123 85	127 10	130 33	133 54	136 72	139 88	143 01
14.	146 13	149 22	152 29	155 34	158 36	161 37	164 35	167 32	170 26	173 19
15.	176 09	178 98	181 84	184 69	187 52	190 33	193 12	195 90	198 66	201 40
16.	204 12	206 83	209 52	212 19	214 84	217 48	220 11	222 72	225 31	227 89
17.	230 45	233 00	235 53	238 05	240 55	243 04	245 51	247 97	250 42	252 85
18.	255 27	257 68	260 07	262 45	264 82	267 17	269 51	271 84	274 16	276 46
19.	278 75	281 03	283 30	285 56	287 80	290 03	292 26	294 47	296 67	298 85
20.	301 03	303 20	305 35	307 50	309 63	311 75	313 87	315 97	318 06	320 15
21.	322 22	324 28	326 34	328 38	330 41	332 44	334 45	336 46	338 46	340 44
22.	342 42	344 39	346 35	348 30	350 25	352 18	354 11	356 03	357 93	359 84
23.	361 73	363 61	365 49	367 36	369 22	371 07	372 91	374 75	376 58	378 40
24.	380 21	382 02	383 82	385 61	387 39	389 17	390 94	392 70	394 45	396 20
25.	397 94	399 67	401 40	403 12	404 83	406 54	408 24	409 93	411 62	413 30
26.	414 97	416 64	418 30	419 96	421 60	423 25	424 88	426 51	428 13	429 75
27.	431 36	432 97	434 57	436 16	437 75	439 33	440 91	442 48	444 04	445 60
28.	447 16	448 71	450 25	451 79	453 32	454 84	456 37	457 88	459 39	460 90
29.	462 40	463 89	465 38	466 87	468 35	469 82	471 29	472 76	474 22	475 67
30.	477 12	478 57	480 01	481 44	482 87	484 30	485 72	487 14	488 55	489 96
31.	491 36	492 76	494 15	495 54	496 93	498 31	499 69	501 06	502 43	503 79
32.	505 15	506 51	507 86	509 20	510 55	511 88	513 22	514 55	515 87	517 20
33.	518 51	519 83	521 14	522 44	523 75	525 04	526 34	527 63	528 92	530 20
34.	531 48	532 75	534 03	535 29	536 56	537 82	539 08	540 33	541 58	542 83
35.	544 07	545 31	546 54	547 77	549 00	550 23	551 45	552 67	553 88	555 09
36.	556 30	557 51	558 71	559 91	561 10	562 29	563 48	564 67	565 85	567 03
37.	568 20	569 37	570 54	571 71	572 87	574 03	575 19	576 34	577 49	578 64
38.	579 78	580 92	582 06	583 20	584 33	585 46	586 59	587 71	588 83	589 95
39.	591 06	592 18	593 29	594 39	595 50	596 60	597 70	598 79	599 88	600 97
40.	602 06	603 14	604 23	605 31	606 38	607 46	608 53	609 59	610 66	611 72
41.	612 78	613 84	614 90	615 95	617 00	618 05	619 09	620 14	621 18	622 21
42.	623 25	624 28	625 31	626 34	627 37	628 39	629 41	630 43	631 44	632 46
43.	633 47	634 48	635 48	636 49	637 49	638 49	639 49	640 48	641 47	642 46
44.	643 45	644 44	645 42	646 40	647 38	648 36	649 33	650 31	651 28	652 25
45.	653 21	654 18	655 14	656 10	657 06	658 01	658 96	659 92	660 87	661 81
46.	662 76	663 70	664 64	665 58	666 52	667 45	668 39	669 32	670 25	671 17
47.	672 10	673 02	673 94	674 86	675 78	676 69	677 61	678 52	679 43	680 34
48.	681 24	682 15	683 05	683 95	684 85	685 74	686 64	687 53	688 42	689 31
49.	690 20	691 08	691 97	692 85	693 73	694 61	695 48	696 36	697 23	698 10

EXEMPLES D'UTILISATION

① MULTIPLICATION

$c = a.b \iff \log c = \log a + \log b$

253 ×312 → 2,403 12 + 2,494 15 → 4,897 27 → =78 936

② PUISSANCE

$N = a^n \iff \log N = n.\log a$

9^4 → 0,954 24 ×4 → 3,816 96 → =6 561

③ DIVISION

$c = a:b \iff \log c = \log a - \log b$

480 : 6 → 2,681 24 − 0,778 15 → 1,903 09 → = 80

④ RACINE

$R = \sqrt[n]{a} \iff \log R = \frac{\log a}{n}$

$\sqrt[3]{72}$ → 1,857 33 : 3 → 0,619 11 → =4,160 2

log — LOGARITHMES

MANTISSES DES NOMBRES DE 500 à 999

Doc 16

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50.	698 97	699 84	700 70	701 57	702 43	703 29	704 15	705 01	705 86	706 72
51.	707 57	708 42	709 27	710 12	710 96	711 81	712 65	713 49	714 33	715 17
52.	716 00	716 84	717 67	718 50	719 33	720 16	720 99	721 81	722 63	723 46
53.	724 28	725 09	725 91	726 73	727 54	728 35	729 16	729 97	730 78	731 59
54.	732 39	733 20	734 00	734 80	735 60	736 40	737 19	737 99	738 78	739 57
55.	740 36	741 15	741 94	742 73	743 51	744 29	745 07	745 86	746 63	747 41
56.	748 19	748 96	749 74	750 51	751 28	752 05	752 82	753 58	754 35	755 11
57.	755 87	756 64	757 40	758 15	758 91	759 67	760 42	761 18	761 93	762 68
58.	763 43	764 18	764 92	765 67	766 41	767 16	767 90	768 64	769 38	770 12
59.	770 85	771 59	772 32	773 05	773 79	774 52	775 25	775 97	776 70	777 43
60.	778 15	778 87	779 60	780 32	781 04	781 76	782 47	783 19	783 90	784 62
61.	785 33	786 04	786 75	787 46	788 17	788 88	789 58	790 29	790 99	791 69
62.	792 39	793 09	793 79	794 49	795 18	795 88	796 57	797 27	797 96	798 65
63.	799 34	800 03	800 72	801 40	802 09	802 77	803 46	804 14	804 82	805 50
64.	806 18	806 86	807 54	808 21	808 89	809 56	810 23	810 90	811 58	812 24
65.	812 91	813 58	814 25	814 91	815 58	816 24	816 90	817 57	818 23	818 89
66.	819 54	820 20	820 86	821 51	822 17	822 82	823 47	824 13	824 78	825 43
67.	826 07	826 72	827 37	828 02	828 66	829 30	829 95	830 59	831 23	831 87
68.	832 51	833 15	833 78	834 42	835 06	835 69	836 32	836 96	837 59	838 22
69.	838 85	839 48	840 11	840 73	841 36	841 98	842 61	843 23	843 86	844 48
70.	845 10	845 72	846 34	846 96	847 57	848 19	848 80	849 42	850 03	850 65
71.	851 26	851 87	852 48	853 09	853 70	854 31	854 91	855 52	856 12	856 73
72.	857 33	857 94	858 54	859 14	859 74	860 34	860 94	861 53	862 13	862 73
73.	863 32	863 92	864 51	865 10	865 70	866 29	866 88	867 47	868 06	868 64
74.	869 23	869 82	870 40	870 99	871 57	872 16	872 74	873 32	873 90	874 48
75.	875 06	875 64	876 22	876 79	877 37	877 95	878 52	879 10	879 67	880 24
76.	880 81	881 38	881 95	882 52	883 09	883 66	884 23	884 80	885 36	885 93
77.	886 49	887 05	887 62	888 18	888 74	889 30	889 86	890 42	890 98	891 54
78.	892 09	892 65	893 21	893 76	894 32	894 87	895 42	895 97	896 53	897 08
79.	897 63	898 18	898 73	899 27	899 82	900 37	900 91	901 46	902 00	902 55
80.	903 09	903 63	904 17	904 72	905 26	905 80	906 34	906 87	907 41	907 95
81.	908 49	909 02	909 56	910 09	910 62	911 16	911 69	912 22	912 75	913 28
82.	913 81	914 34	914 87	915 40	915 93	916 45	916 98	917 51	918 03	918 55
83.	919 08	919 60	920 12	920 65	921 17	921 69	922 21	922 73	923 24	923 76
84.	924 28	924 80	925 31	925 83	926 34	926 86	927 37	927 88	928 40	928 91
85.	929 42	929 93	930 44	930 95	931 46	931 97	932 47	932 98	933 49	933 99
86.	934 50	935 00	935 51	936 01	936 51	937 02	937 52	938 02	938 52	939 02
87.	939 52	940 02	940 52	941 01	941 51	942 01	942 50	943 00	943 49	943 99
88.	944 48	944 98	945 47	945 96	946 45	946 94	947 43	947 92	948 41	948 90
89.	949 39	949 88	950 36	950 85	951 34	951 82	952 31	952 79	953 28	953 76
90.	954 24	954 72	955 21	955 69	956 17	956 65	957 13	957 61	958 09	958 56
91.	959 04	959 52	959 99	960 47	960 95	961 42	961 90	962 37	962 84	963 32
92.	963 79	964 26	964 73	965 20	965 67	966 14	966 61	967 08	967 55	968 02
93.	968 48	968 95	969 42	969 88	970 35	970 81	971 28	971 74	972 20	972 67
94.	973 13	973 59	974 05	974 51	974 97	975 43	975 89	976 35	976 81	977 27
95.	977 72	978 18	978 64	979 09	979 55	980 00	980 46	980 91	981 37	981 82
96.	982 27	982 72	983 18	983 63	984 08	984 53	984 98	985 43	985 88	986 32
97.	986 77	987 22	987 67	988 11	988 56	989 00	989 45	989 89	990 34	990 78
98.	991 23	991 67	992 11	992 55	993 00	993 44	993 88	994 32	994 76	995 20
99.	995 64	996 07	996 51	996 95	997 39	997 82	998 26	998 70	999 13	999 57

CALCUL DES NOMBRES RENARD (R) (raison $q = \sqrt[10]{10}$)

Termes	1	q^1	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7	q^8	q^9	q^{10}
log.	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
arith.	1	1,2589	1,5849	1,9953	2,5119	3,1623	3,9811	5,0119	6,3096	7,9433	10
$\simeq$	1,00	1,25	1,60	2,00	2,50	3,15	4,00	5,00	6,30	8,00	10,00

Doc 17	TABLE DES CARRÉS DES NOMBRES 0 à 499	N^2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1.	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2.	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3.	900	961	1 024	1 089	1 156	1 225	1 296	1 369	1 444	1 521
4.	1 600	1 681	1 764	1 849	1 936	2 025	2 116	2 209	2 304	2 401
5.	2 500	2 601	2 704	2 809	2 916	3 025	3 136	3 249	3 364	3 481
6.	3 600	3 721	3 844	3 969	4 096	4 225	4 356	4 489	4 624	4 761
7.	4 900	5 041	5 184	5 329	5 476	5 625	5 776	5 929	6 084	6 241
8.	6 400	6 561	6 724	6 889	7 056	7 225	7 396	7 569	7 744	7 921
9.	8 100	8 281	8 464	8 649	8 836	9 025	9 216	9 409	9 604	9 801
10.	10 000	10 201	10 404	10 609	10 816	11 025	11 236	11 449	11 664	11 881
11.	12 100	12 321	12 544	12 769	12 996	13 225	13 456	13 689	13 924	14 161
12.	14 400	14 641	14 884	15 129	15 376	15 625	15 876	16 129	16 384	16 641
13.	16 900	17 161	17 424	17 689	17 956	18 225	18 496	18 769	19 044	19 321
14.	19 600	19 881	20 164	20 449	20 736	21 025	21 316	21 609	21 904	22 201
15.	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281
16.	25 600	25 921	26 244	26 569	26 896	27 225	27 556	27 889	28 224	28 561
17.	28 900	29 241	29 584	29 929	30 276	30 625	30 976	31 329	31 684	32 041
18.	32 400	32 761	33 124	33 489	33 856	34 225	34 596	34 969	35 344	35 721
19.	36 100	36 481	36 864	37 249	37 636	38 025	38 416	38 809	39 204	39 601
20.	40 000	40 401	40 804	41 209	41 616	42 025	42 436	42 849	43 264	43 681
21.	44 100	44 521	44 944	45 369	45 796	46 225	46 656	47 089	47 524	47 961
22.	48 400	48 841	49 284	49 729	50 176	50 625	51 076	51 529	51 984	52 441
23.	52 900	53 361	53 824	54 289	54 756	55 225	55 696	56 169	56 644	57 121
24.	57 600	58 081	58 564	59 049	59 536	60 025	60 516	61 009	61 504	62 001
25.	62 500	63 001	63 504	64 009	64 516	65 025	65 536	66 049	66 564	67 081
26.	67 600	68 121	68 644	69 169	69 696	70 225	70 756	71 289	71 824	72 361
27.	72 900	73 441	73 984	74 529	75 076	75 625	76 176	76 729	77 284	77 841
28.	78 400	78 961	79 524	80 089	80 656	81 225	81 796	82 369	82 944	83 521
29.	84 100	84 681	85 264	85 849	86 436	87 025	87 616	88 209	88 804	89 401
30.	90 000	90 601	91 204	91 809	92 416	93 025	93 636	94 249	94 864	95 481
31.	96 100	96 721	97 344	97 969	98 596	99 225	99 856	100 489	101 124	101 761
32.	102 400	103 041	103 684	104 329	104 976	105 625	106 276	106 929	107 584	108 241
33.	108 900	109 561	110 224	110 889	111 556	112 225	112 896	113 569	114 244	114 921
34.	115 600	116 281	116 964	117 649	118 336	119 025	119 716	120 409	121 104	121 801
35.	122 500	123 201	123 904	124 609	125 316	126 025	126 736	127 449	128 164	128 881
36.	129 600	130 321	131 044	131 769	132 496	133 225	133 956	134 689	135 424	136 161
37.	136 900	137 641	138 384	139 129	139 876	140 625	141 376	142 129	142 884	143 641
38.	144 400	145 161	145 924	146 689	147 456	148 225	148 996	149 769	150 544	151 321
39.	152 100	152 881	153 664	154 449	155 236	156 025	156 816	157 609	158 404	159 201
40.	160 000	160 801	161 604	162 409	163 216	164 025	164 836	165 649	166 464	167 281
41.	168 100	168 921	169 744	170 569	171 396	172 225	173 056	173 889	174 724	175 561
42.	176 400	177 241	178 084	178 929	179 776	180 625	181 476	182 329	183 184	184 041
43.	184 900	185 761	186 624	187 489	188 356	189 225	190 096	190 969	191 844	192 721
44.	193 600	194 481	195 364	196 249	197 136	198 025	198 916	199 809	200 704	201 601
45.	202 500	203 401	204 304	205 209	206 116	207 025	207 936	208 849	209 764	210 681
46.	211 600	212 521	213 444	214 369	215 296	216 225	217 156	218 089	219 024	219 961
47.	220 900	221 841	222 784	223 729	224 676	225 625	226 576	227 529	228 484	229 441
48.	230 400	231 361	232 324	233 289	234 256	235 225	236 196	237 169	238 144	239 121
49.	240 100	241 081	242 064	243 049	244 036	245 025	246 016	247 009	248 004	249 001

CARRÉ DE 10 N, 100 N....,

① Carrés des puissances de 10
doubler le nombre de zéros
$10^2 = 100$
$100^2 = 10\,000$
$1000^2 = 1\,000\,000$

② Carré d'un nombre de 3 chiffres
lire la table
Ex: $135^2 = 18\,225$

③ Carré d'un nombre ayant 3 chiffres significatifs
Ex: $1340^2 = 134^2 \times 10^2 = 1\,795\,600$
$2500^2 = 25^2 \times 100^2 = 6\,250\,000$

④ Carré d'un nombre quelconque
Ex: $6253^2 \simeq 6250^2 \simeq 39\,062\,500$

N^2 TABLE DES CARRÉS

DES NOMBRES 500 à 999

Doc 18

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50.	250 000	251 001	252 004	253 009	254 016	255 025	256 036	257 049	258 064	259 081
51.	260 100	261 121	262 144	263 169	264 196	265 225	266 256	267 289	268 324	269 361
52.	270 400	271 441	272 484	273 529	274 576	275 625	276 676	277 729	278 784	279 841
53.	280 900	281 961	283 024	284 089	285 156	286 225	287 296	288 369	289 444	290 521
54.	291 600	292 681	293 764	294 849	295 936	297 025	298 116	299 209	300 304	301 401
55.	302 500	303 601	304 704	305 809	306 916	308 025	309 136	310 249	311 364	312 481
56.	313 600	314 721	315 844	316 969	318 096	319 225	320 356	321 489	322 624	323 761
57.	324 900	326 041	327 184	328 329	329 476	330 625	331 776	332 929	334 084	335 241
58.	336 400	337 561	338 724	339 889	341 056	342 225	343 396	344 569	345 744	346 921
59.	348 100	349 281	350 464	351 649	352 836	354 025	355 216	356 409	357 604	358 801
60.	360 000	361 201	362 404	363 609	364 816	366 025	367 236	368 449	369 664	370 881
61.	372 100	373 321	374 544	375 769	376 996	378 225	379 456	380 689	381 924	383 161
62.	384 400	385 641	386 884	388 129	389 376	390 625	391 876	393 129	394 384	395 641
63.	396 900	398 161	399 424	400 689	401 956	403 225	404 496	405 769	407 044	408 321
64.	409 600	410 881	412 164	413 449	414 736	416 025	417 316	418 609	419 904	421 201
65.	422 500	423 801	425 104	426 409	427 716	429 025	430 336	431 649	432 964	434 281
66.	435 600	436 921	438 244	439 569	440 896	442 225	443 556	444 889	446 224	447 561
67.	448 900	450 241	451 584	452 929	454 276	455 625	456 976	458 329	459 684	461 041
68.	462 400	463 761	465 124	466 489	467 856	469 225	470 596	471 969	473 344	474 721
69.	476 100	477 481	478 864	480 249	481 636	483 025	484 416	485 809	487 204	488 601
70.	490 000	491 401	492 804	494 209	495 616	497 025	498 436	499 849	501 264	502 681
71.	504 100	505 521	506 944	508 369	509 796	511 225	512 656	514 089	515 524	516 961
72.	518 400	519 841	521 284	522 729	524 176	525 625	527 076	528 529	529 984	531 441
73.	532 900	534 361	535 824	537 289	538 756	540 225	541 696	543 169	544 644	546 121
74.	547 600	549 081	550 564	552 049	553 536	555 025	556 516	558 009	559 504	561 001
75.	562 500	564 001	565 504	567 009	568 516	570 025	571 536	573 049	574 564	576 081
76.	577 600	579 121	580 644	582 169	583 696	585 225	586 756	588 289	589 824	591 361
77.	592 900	594 441	595 984	597 529	599 076	600 625	602 176	603 729	605 284	606 841
78.	608 400	609 961	611 524	613 089	614 656	616 225	617 796	619 369	620 944	622 521
79.	624 100	625 681	627 264	628 849	630 436	632 025	633 616	635 209	636 804	638 401
80.	640 000	641 601	643 204	644 809	646 416	648 025	649 636	651 249	652 864	654 481
81.	656 100	657 721	659 344	660 969	662 596	664 225	665 856	667 489	669 124	670 761
82.	672 400	674 041	675 684	677 329	678 976	680 625	682 276	683 929	685 584	687 241
83.	688 900	690 561	692 224	693 889	695 556	697 225	698 896	700 569	702 244	703 921
84.	705 600	707 281	708 964	710 649	712 336	714 025	715 716	717 409	719 104	720 801
85.	722 500	724 201	725 904	727 609	729 316	731 025	732 736	734 449	736 164	737 881
86.	739 600	741 321	743 044	744 769	746 496	748 225	749 956	751 689	753 424	755 161
87.	756 900	758 641	760 384	762 129	763 876	765 625	767 376	769 129	770 884	772 641
88.	774 400	776 161	777 924	779 689	781 456	783 225	784 996	786 769	788 544	790 321
89.	792 100	793 881	795 664	797 449	799 236	801 025	802 816	804 609	806 404	808 201
90.	810 000	811 801	813 604	815 409	817 216	819 025	820 836	822 649	824 464	826 281
91.	828 100	829 921	831 744	833 569	835 396	837 225	839 056	840 889	842 724	844 561
92.	846 400	848 241	850 084	851 929	853 776	855 625	857 476	859 329	861 184	863 041
93.	864 900	866 761	868 624	870 489	872 356	874 225	876 096	877 969	879 844	881 721
94.	883 600	885 481	887 364	889 249	891 136	893 025	894 916	896 809	898 704	900 601
95.	902 500	904 401	906 304	908 209	910 116	912 025	913 936	915 849	917 764	919 681
96.	921 600	923 521	925 444	927 369	929 296	931 225	933 156	935 089	937 024	938 961
97.	940 900	942 841	944 784	946 729	948 676	950 625	952 576	954 529	956 484	958 441
98.	960 400	962 361	964 324	966 289	968 256	970 225	972 196	974 169	976 144	978 121
99.	980 100	982 081	984 064	986 049	988 036	990 025	992 016	994 009	996 004	998 001

① CARRÉS DES NOMBRES DÉCIMAUX

Exemple:

$12{,}6^2 = 153{,}76$

carré de 126,

(2 chiffres décimaux)

Ne pas tenir compte de la virgule et effectuer le carré.

Séparer, à droite, un nombre double de chiffres décimaux:

2 si le nombre en comporte 1

4 — — — — — — — — 2

6 — — — — — — — — — — — 3

Exemple:

$3{,}14^2 = 9{,}8596$

carré de 314,

(4 chiffres décimaux)

Doc 19 — TABLE DES RACINES CARRÉES

DES NOMBRES 0 à 499

$\sqrt{N}$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0,0000	1,0000	1,4142	1,7321	2,0000	2,2361	2,4495	2,6458	2,8284	3,0000
1.	3,1623	3,3166	3,4641	3,6056	3,7417	3,8730	4,0000	4,1231	4,2426	4,3589
2.	4,4721	4,5826	4,6904	4,7958	4,8990	5,0000	5,0990	5,1962	5,2915	5,3852
3.	5,4772	5,5678	5,6569	5,7446	5,8310	5,9161	6,0000	6,0828	6,1644	6,2450
4.	6,3246	6,4031	6,4807	6,5574	6,6332	6,7082	6,7823	6,8557	6,9282	7,0000
5.	7,0711	7,1414	7,2111	7,2801	7,3485	7,4162	7,4833	7,5498	7,6158	7,6811
6.	7,7460	7,8102	7,8740	7,9373	8,0000	8,0623	8,1240	8,1854	8,2462	8,3066
7.	8,3666	8,4261	8,4853	8,5440	8,6023	8,6603	8,7178	8,7750	8,8318	8,8882
8.	8,9443	9,0000	9,0554	9,1104	9,1652	9,2195	9,2736	9,3274	9,3808	9,4340
9.	9,4868	9,5394	9,5917	9,6437	9,6954	9,7468	9,7980	9,8489	9,8995	9,9499
10.	10,0000	10,0499	10,0995	10,1489	10,1980	10,2470	10,2956	10,3441	10,3923	10,4403
11.	10,4881	10,5357	10,5830	10,6301	10,6771	10,7238	10,7703	10,8167	10,8628	10,9087
12.	10,9545	11,0000	11,0454	11,0905	11,1355	11,1803	11,2250	11,2694	11,3137	11,3578
13.	11,4018	11,4455	11,4891	11,5326	11,5758	11,6190	11,6619	11,7047	11,7473	11,7898
14.	11,8322	11,8743	11,9164	11,9583	12,0000	12,0416	12,0830	12,1244	12,1655	12,2066
15.	12,2474	12,2882	12,3288	12,3693	12,4097	12,4499	12,4900	12,5300	12,5698	12,6095
16.	12,6491	12,6886	12,7279	12,7671	12,8062	12,8452	12,8841	12,9228	12,9615	13,0000
17.	13,0384	13,0767	13,1149	13,1529	13,1909	13,2288	13,2665	13,3041	13,3417	13,3791
18.	13,4164	13,4536	13,4907	13,5277	13,5647	13,6015	13,6382	13,6748	13,7113	13,7477
19.	13,7840	13,8203	13,8564	13,8924	13,9284	13,9642	14,0000	14,0357	14,0712	14,1067
20.	14,1421	14,1774	14,2127	14,2478	14,2829	14,3178	14,3527	14,3875	14,4222	14,4568
21.	14,4914	14,5258	14,5602	14,5945	14,6287	14,6629	14,6969	14,7309	14,7648	14,7986
22.	14,8324	14,8661	14,8997	14,9332	14,9666	15,0000	15,0333	15,0665	15,0997	15,1327
23.	15,1658	15,1987	15,2315	15,2643	15,2971	15,3297	15,3623	15,3948	15,4272	15,4596
24.	15,4919	15,5242	15,5563	15,5885	15,6205	15,6525	15,6844	15,7162	15,7480	15,7797
25.	15,8114	15,8430	15,8745	15,9060	15,9374	15,9687	16,0000	16,0312	16,0624	16,0935
26.	16,1245	16,1555	16,1864	16,2173	16,2481	16,2788	16,3095	16,3401	16,3707	16,4012
27.	16,4317	16,4621	16,4924	16,5227	16,5529	16,5831	16,6132	16,6433	16,6733	16,7033
28.	16,7332	16,7631	16,7929	16,8226	16,8523	16,8819	16,9115	16,9411	16,9706	17,0000
29.	17,0294	17,0587	17,0880	17,1172	17,1464	17,1756	17,2047	17,2337	17,2627	17,2916
30.	17,3205	17,3494	17,3781	17,4069	17,4356	17,4642	17,4929	17,5214	17,5499	17,5784
31.	17,6068	17,6352	17,6635	17,6918	17,7200	17,7482	17,7764	17,8045	17,8326	17,8606
32.	17,8885	17,9165	17,9444	17,9722	18,0000	18,0278	18,0555	18,0831	18,1108	18,1384
33.	18,1659	18,1934	18,2209	18,2483	18,2757	18,3030	18,3303	18,3576	18,3848	18,4120
34.	18,4391	18,4662	18,4932	18,5203	18,5472	18,5742	18,6011	18,6279	18,6548	18,6815
35.	18,7083	18,7350	18,7617	18,7883	18,8149	18,8414	18,8680	18,8944	18,9209	18,9473
36.	18,9737	19,0000	19,0263	19,0526	19,0788	19,1050	19,1311	19,1572	19,1833	19,2094
37.	19,2354	19,2614	19,2873	19,3132	19,3391	19,3649	19,3907	19,4165	19,4422	19,4679
38.	19,4936	19,5192	19,5448	19,5704	19,5959	19,6214	19,6469	19,6723	19,6977	19,7231
39.	19,7484	19,7737	19,7990	19,8242	19,8494	19,8746	19,8997	19,9249	19,9499	19,9750
40.	20,0000	20,0250	20,0499	20,0749	20,0998	20,1246	20,1494	20,1742	20,1990	20,2237
41.	20,2485	20,2731	20,2978	20,3224	20,3470	20,3715	20,3961	20,4206	20,4450	20,4695
42.	20,4939	20,5183	20,5426	20,5670	20,5913	20,6155	20,6398	20,6640	20,6882	20,7123
43.	20,7364	20,7605	20,7846	20,8087	20,8327	20,8567	20,8806	20,9045	20,9284	20,9523
44.	20,9762	21,0000	21,0238	21,0476	21,0713	21,0950	21,1187	21,1424	21,1660	21,1896
45.	21,2132	21,2368	21,2603	21,2838	21,3073	21,3307	21,3542	21,3776	21,4009	21,4243
46.	21,4476	21,4709	21,4942	21,5174	21,5407	21,5639	21,5870	21,6102	21,6333	21,6564
47.	21,6795	21,7025	21,7256	21,7486	21,7715	21,7945	21,8174	21,8403	21,8632	21,8861
48.	21,9089	21,9317	21,9545	21,9773	22,0000	22,0227	22,0454	22,0681	22,0907	22,1133
49.	22,1359	22,1585	22,1811	22,2036	22,2261	22,2486	22,2711	22,2935	22,3159	22,3383

RACINE CARRÉE DE 10 N . 100 N..... 0,1 N . 0,01 N

① Racine carrée des puissances de 10 : diviser par 2 le nombre de zéros

$\sqrt{100} = 10$ $\sqrt{10\,000} = 100$

② Racine carrée d'un nombre de 3 chiffres : lire dans la table.

Ex. $\sqrt{961} = 31$

③ Racine carrée d'un nombre ayant 3 chiffres significatifs :

$\sqrt{12\,800} = \sqrt{128} \times \sqrt{100} = 113{,}137$

④ Racine carrée d'un nombre décimal.

Ex. $\sqrt{7{,}5} = \sqrt{\frac{750}{100}} = \frac{\sqrt{750}}{10} = 2{,}739$

$\sqrt{N}$ TABLE DES RACINES CARRÉES

DES NOMBRES 500 à 999

Doc 20

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50.	22,3607	22,3830	22,4054	22,4277	22,4499	22,4722	22,4944	22,5167	22,5389	22,5610
51.	22,5832	22,6053	22,6274	22,6495	22,6716	22,6936	22,7156	22,7376	22,7596	22,7816
52.	22,8035	22,8254	22,8473	22,8692	22,8910	22,9129	22,9347	22,9565	22,9783	23,0000
53.	23,0217	23,0434	23,0651	23,0868	23,1084	23,1301	23,1517	23,1733	23,1948	23,2164
54.	23,2379	23,2594	23,2809	23,3024	23,3238	23,3452	23,3666	23,3880	23,4094	23,4307
55.	23,4521	23,4734	23,4947	23,5160	23,5372	23,5584	23,5797	23,6008	23,6220	23,6432
56.	23,6643	23,6854	23,7065	23,7276	23,7487	23,7697	23,7908	23,8118	23,8328	23,8537
57.	23,8747	23,8956	23,9165	23,9374	23,9583	23,9792	24,0000	24,0208	24,0416	24,0624
58.	24,0832	24,1039	24,1247	24,1454	24,1661	24,1868	24,2074	24,2281	24,2487	24,2693
59.	24,2899	24,3105	24,3311	24,3516	24,3721	24,3926	24,4131	24,4336	24,4540	24,4745
60.	24,4949	24,5153	24,5357	24,5561	24,5764	24,5967	24,6171	24,6374	24,6577	24,6779
61.	24,6982	24,7184	24,7386	24,7588	24,7790	24,7992	24,8193	24,8395	24,8596	24,8797
62.	24,8998	24,9199	24,9399	24,9600	24,9800	25,0000	25,0200	25,0400	25,0599	25,0799
63.	25,0998	25,1197	25,1396	25,1595	25,1794	25,1992	25,2190	25,2389	25,2587	25,2784
64.	25,2982	25,3180	25,3377	25,3574	25,3772	25,3969	25,4165	25,4362	25,4558	25,4755
65.	25,4951	25,5147	25,5343	25,5539	25,5734	25,5930	25,6125	25,6320	25,6515	25,6710
66.	25,6905	25,7099	25,7294	25,7488	25,7682	25,7876	25,8070	25,8263	25,8457	25,8650
67.	25,8844	25,9037	25,9230	25,9422	25,9615	25,9808	26,0000	26,0192	26,0384	26,0576
68.	26,0768	26,0960	26,1151	26,1343	26,1534	26,1725	26,1916	26,2107	26,2298	26,2488
69.	26,2679	26,2869	26,3059	26,3249	26,3439	26,3629	26,3818	26,4008	26,4197	26,4386
70.	26,4575	26,4764	26,4953	26,5141	26,5330	26,5518	26,5707	26,5895	26,6083	26,6271
71.	26,6458	26,6646	26,6833	26,7021	26,7208	26,7395	26,7582	26,7769	26,7955	26,8142
72.	26,8328	26,8514	26,8701	26,8887	26,9072	26,9258	26,9444	26,9629	26,9815	27,0000
73.	27,0185	27,0370	27,0555	27,0740	27,0924	27,1109	27,1293	27,1477	27,1662	27,1846
74.	27,2029	27,2213	27,2397	27,2580	27,2764	27,2947	27,3130	27,3313	27,3496	27,3679
75.	27,3861	27,4044	27,4226	27,4408	27,4591	27,4773	27,4955	27,5136	27,5318	27,5500
76.	27,5681	27,5862	27,6043	27,6225	27,6405	27,6586	27,6767	27,6948	27,7128	27,7308
77.	27,7489	27,7669	27,7849	27,8029	27,8209	27,8388	27,8568	27,8747	27,8927	27,9106
78.	27,9285	27,9464	27,9643	27,9821	28,0000	28,0179	28,0357	28,0535	28,0713	28,0891
79.	28,1069	28,1247	28,1425	28,1603	28,1780	28,1957	28,2135	28,2312	28,2489	28,2666
80.	28,2843	28,3019	28,3196	28,3373	28,3549	28,3725	28,3901	28,4077	28,4253	28,4429
81.	28,4605	28,4781	28,4956	28,5132	28,5307	28,5482	28,5657	28,5832	28,6007	28,6182
82.	28,6356	28,6531	28,6705	28,6880	28,7054	28,7228	28,7402	28,7576	28,7750	28,7924
83.	28,8097	28,8271	28,8444	28,8617	28,8791	28,8964	28,9137	28,9310	28,9482	28,9655
84.	28,9828	29,0000	29,0172	29,0345	29,0517	29,0689	29,0861	29,1033	29,1204	29,1376
85.	29,1548	29,1719	29,1890	29,2062	29,2233	29,2404	29,2575	29,2746	29,2916	29,3087
86.	29,3258	29,3428	29,3598	29,3769	29,3939	29,4109	29,4279	29,4449	29,4618	29,4788
87.	29,4958	29,5127	29,5296	29,5466	29,5635	29,5804	29,5973	29,6142	29,6311	29,6479
88.	29,6648	29,6816	29,6985	29,7153	29,7321	29,7489	29,7658	29,7825	29,7993	29,8161
89.	29,8329	29,8496	29,8664	29,8831	29,8998	29,9166	29,9333	29,9500	29,9666	29,9833
90.	30,0000	30,0167	30,0333	30,0500	30,0666	30,0832	30,0998	30,1164	30,1330	30,1496
91.	30,1662	30,1828	30,1993	30,2159	30,2324	30,2490	30,2655	30,2820	30,2985	30,3150
92.	30,3315	30,3480	30,3645	30,3809	30,3974	30,4138	30,4302	30,4467	30,4631	30,4795
93.	30,4959	30,5123	30,5287	30,5450	30,5614	30,5778	30,5941	30,6105	30,6268	30,6431
94.	30,6594	30,6757	30,6920	30,7083	30,7246	30,7409	30,7571	30,7734	30,7896	30,8058
95.	30,8221	30,8383	30,8545	30,8707	30,8869	30,9031	30,9192	30,9354	30,9516	30,9677
96.	30,9839	31,0000	31,0161	31,0322	31,0483	31,0644	31,0805	31,0966	31,1127	31,1288
97.	31,1448	31,1609	31,1769	31,1929	31,2090	31,2250	31,2410	31,2570	31,2730	31,2890
98.	31,3050	31,3209	31,3369	31,3528	31,3688	31,3847	31,4006	31,4166	31,4325	31,4484
99.	31,4643	31,4802	31,4960	31,5119	31,5278	31,5436	31,5595	31,5753	31,5911	31,6070

① EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE

Exemple:

6'25	25
4	45
225	5
225	225
0	

1. Partager en tranches de 2 chiffres en partant de la virgule
2. Extraire la racine de la 1ère tranche ($\sqrt{6} \simeq 2$)
3. Soustraire de la 1ère tranche le carré de cette racine ($6-2^2=2$)
4. Abaisser à côté du reste la 2ème tranche. Isoler le premier chiffre à droite (22,5)
5. Diviser la tranche de gauche par 2 fois la racine ($22:4 \simeq 5$)
6. Ecrire 5 à la droite de 4 et multiplier par 5
7. Retrancher de 225... ... etc...

Doc 21

TABLE DES CUBES

DES NOMBRES 1 à 499

N^3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
0.	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	0.
1.	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	1.
2.	8000	9261	10648	12167	13824	15625	17576	19683	21952	24389	2.
3.	27000	29791	32768	35937	39304	42875	46656	50653	54872	59319	3.
4.	64000	68921	74088	79507	85184	91125	97336	103823	110592	117649	4.
5.	125000	132651	140608	148877	157464	166375	175616	185193	195112	205379	5.
6.	216000	226981	238328	250047	262144	274625	287496	300763	314432	328509	6.
7.	343000	357911	373248	389017	405224	421875	438976	456533	474552	493039	7.
8.	512000	531441	551368	571787	592704	614125	636056	658503	681472	704969	8.
9.	729000	753571	778688	804357	830584	857375	884736	912673	941192	970299	9.
10.	1000000	1030301	1061208	1092727	1124864	1157625	1191016	1225043	1259712	1295029	10.
11.	1331000	1367631	1404928	1442897	1481544	1520875	1560896	1601613	1643032	1685159	11.
12.	1728000	1771561	1815848	1860867	1906624	1953125	2000376	2048383	2097152	2146689	12.
13.	2197000	2248091	2299968	2352637	2406104	2460375	2515456	2571353	2628072	2685619	13.
14.	2744000	2803221	2863288	2924207	2985984	3048625	3112136	3176523	3241792	3307949	14.
15.	3375000	3442951	3511808	3581577	3652264	3723875	3796416	3869893	3944312	4019679	15.
16.	4096000	4173281	4251528	4330747	4410944	4492125	4574296	4657463	4741632	4826809	16.
17.	4913000	5000211	5088448	5177717	5268024	5359375	5451776	5545233	5639752	5735339	17.
18.	5832000	5929741	6028568	6128487	6229504	6331625	6434856	6539203	6644672	6751269	18.
19.	6859000	6967871	7077888	7189057	7301384	7414875	7529536	7645373	7762392	7880599	19.
20.	8000000	8120601	8242408	8365427	8489664	8615125	8741816	8869743	8998912	9129329	20.
21.	9261000	9393931	9528128	9663597	9800344	9938375	10077696	10218313	10360232	10503459	21.
22.	10648000	10793861	10941048	11089567	11239424	11390625	11543176	11697083	11852352	12008989	22.
23.	12167000	12326391	12487168	12649337	12812904	12977875	13144256	13312053	13481272	13651919	23.
24.	13824000	13997521	14172488	14348907	14526784	14706125	14886936	15069223	15252992	15438249	24.
25.	15625000	15813251	16003008	16194277	16387064	16581375	16777216	16974593	17173512	17373979	25.
26.	17576000	17779581	17984728	18191447	18399744	18609625	18821096	19034163	19248832	19465109	26.
27.	19683000	19902511	20123648	20346417	20570824	20796875	21024576	21253933	21484952	21717639	27.
28.	21952000	22188041	22425768	22665187	22906304	23149125	23393656	23639903	23887872	24137569	28.
29.	24389000	24642171	24897088	25153757	25412184	25672375	25934336	26198073	26463592	26730899	29.
30.	27000000	27270901	27543608	27818127	28094464	28372625	28652616	28934443	29218112	29503629	30.
31.	29791000	30080231	30371328	30664297	30959144	31255875	31554496	31855013	32157432	32461759	31.
32.	32768000	33076161	33386248	33698267	34012224	34328125	34645976	34965783	35287552	35611289	32.
33.	35937000	36264691	36594368	36926037	37259704	37595375	37933056	38272753	38614472	38958219	33.
34.	39304000	39651821	40001688	40353607	40707584	41063625	41421736	41781923	42144192	42508549	34.
35.	42875000	43614208	43986977	44361864	44738875	45118016	45499293	45882712	46268279	46656000	35.
36.	46656000	47045881	47437928	47832147	48228544	48627125	49027896	49430863	49836032	50243409	36.
37.	50653000	51064811	51478848	51895117	52313624	52734375	53157376	53582633	54010152	54439939	37.
38.	54872000	55306341	55742968	56181887	56623104	57066625	57512456	57960603	58411072	58863869	38.
39.	59319000	59776471	60236288	60698457	61162984	61629875	62099136	62570773	63044792	63521199	39.
40.	64000000	64481201	64964808	65450827	65939264	66430125	66923416	67419143	67917312	68417929	40.
41.	68921000	69426531	69934528	70444997	70957944	71473375	71991296	72511713	73034632	73560059	41.
42.	74088000	74618461	75151448	75686967	76225024	76765625	77308776	77854483	78402752	78953589	42.
43.	79507000	80062991	80621568	81182737	81746504	82312875	82881856	83453453	84027672	84604519	43.
44.	85184000	85766121	86350888	86938307	87528384	88121125	88716536	89314623	89915392	90518849	44.
45.	91125000	91733851	92345408	92959677	93576664	94196375	94818816	95443993	96071912	96702579	45.
46.	97336000	97972181	98611128	99252847	99897344	100544625	101194696	101847563	102503232	103161709	46.
47.	103823000	104487111	105154048	105823817	106496424	107171875	107850176	108531333	109215352	109902239	47.
48.	110592000	111284641	111980168	112678587	113379904	114084125	114791256	115501303	116214272	116930169	48.
49.	117649000	118370771	119095488	119823157	120553784	121287375	122023936	122763473	123505992	124251499	49.

TABLE DES CUBES

DES NOMBRES 500 à 999

N³

Doc 22

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
50.	125 000 000	125 751 501	126 506 008	127 263 527	128 024 064	128 787 625	129 554 216	130 323 843	131 096 512	131 872 229	50.
51.	132 651 000	133 432 701	134 217 728	135 005 697	135 796 744	136 590 875	137 388 096	138 188 413	138 991 832	139 798 359	51.
52.	140 608 000	141 420 761	142 236 648	143 055 667	143 877 824	144 703 125	145 531 576	146 363 183	147 197 952	148 035 889	52.
53.	148 877 000	149 721 291	150 568 768	151 419 437	152 273 304	153 130 375	153 990 656	154 854 153	155 720 872	156 590 819	53.
54.	157 464 000	158 340 421	159 220 088	160 103 007	160 989 184	161 878 625	162 771 336	163 667 323	164 566 592	165 469 149	54.
55.	166 375 000	167 284 151	168 196 608	169 112 377	170 031 464	170 953 875	171 879 616	172 808 693	173 741 112	174 676 879	55.
56.	175 616 000	176 558 481	177 504 328	178 453 547	179 406 144	180 362 125	181 321 496	182 284 263	183 250 432	184 220 009	56.
57.	185 193 000	186 169 411	187 149 248	188 132 517	189 119 224	190 109 375	191 102 976	192 100 033	193 100 552	194 104 539	57.
58.	195 112 000	196 122 941	197 137 368	198 155 287	199 176 704	200 201 625	201 230 056	202 262 003	203 297 472	204 336 469	58.
59.	205 379 000	206 425 071	207 474 688	208 527 857	209 584 584	210 644 875	211 708 736	212 776 173	213 847 192	214 921 799	59.
60.	216 000 000	217 081 801	218 167 208	219 256 227	220 348 864	221 445 125	222 545 016	223 648 543	224 755 712	225 866 529	60.
61.	226 981 000	228 099 131	229 220 928	230 346 397	231 475 544	232 608 375	233 744 896	234 885 113	236 029 032	237 176 659	61.
62.	238 328 000	239 483 061	240 641 848	241 804 367	242 970 624	244 140 625	245 314 376	246 491 883	247 673 152	248 858 189	62.
63.	250 047 000	251 239 591	252 435 968	253 636 137	254 840 104	256 047 875	257 259 456	258 474 853	259 694 072	260 917 119	63.
64.	262 144 000	263 374 721	264 609 288	265 847 707	267 089 984	268 336 125	269 586 136	270 840 023	272 097 792	273 359 449	64.
65.	274 625 000	275 894 451	277 167 808	278 445 077	279 726 264	281 011 375	282 300 416	283 593 393	284 890 312	286 191 179	65.
66.	287 496 000	288 804 781	290 117 528	291 434 247	292 754 944	294 079 625	295 408 296	296 740 963	298 077 632	299 418 309	66.
67.	300 763 000	302 111 711	303 464 448	304 821 217	306 182 024	307 546 875	308 915 776	310 288 733	311 665 752	313 046 839	67.
68.	314 432 000	315 821 241	317 214 568	318 611 987	320 013 504	321 419 125	322 828 856	324 242 703	325 660 672	327 082 769	68.
69.	328 509 000	329 939 371	331 373 888	332 812 557	334 255 384	335 702 375	337 153 536	338 608 873	340 068 392	341 532 099	69.
70.	343 000 000	344 472 101	345 948 408	347 428 927	348 913 664	350 402 625	351 895 816	353 393 243	354 894 912	356 400 829	70.
71.	357 911 000	359 425 431	360 944 128	362 467 097	363 994 344	365 525 875	367 061 696	368 601 813	370 146 232	371 694 959	71.
72.	373 248 000	374 805 361	376 367 048	377 933 067	379 503 424	381 078 125	382 657 176	384 240 583	385 828 352	387 420 489	72.
73.	389 017 000	390 617 891	392 223 168	393 832 837	395 446 904	397 065 375	398 688 256	400 315 553	401 947 272	403 583 419	73.
74.	405 224 000	406 869 021	408 518 488	410 172 407	411 830 784	413 493 625	415 160 936	416 832 723	418 508 992	420 189 749	74.
75.	421 875 000	423 564 751	425 259 008	426 957 777	428 661 064	430 368 875	432 081 216	433 798 093	435 519 512	437 245 479	75.
76.	438 976 000	440 711 081	442 450 728	444 194 947	445 943 744	447 697 125	449 455 096	451 217 663	452 984 832	454 756 609	76.
77.	456 533 000	458 314 011	460 099 648	461 889 917	463 684 824	465 484 375	467 288 576	469 097 433	470 910 952	472 729 139	77.
78.	474 552 000	476 379 541	478 211 768	480 048 687	481 890 304	483 736 625	485 587 656	487 443 403	489 303 872	491 169 069	78.
79.	493 039 000	494 913 671	496 793 088	498 677 257	500 566 184	502 459 875	504 358 336	506 261 573	508 169 592	510 082 399	79.
80.	512 000 000	513 922 401	515 849 608	517 781 627	519 718 464	521 660 125	523 606 616	525 557 943	527 514 112	529 475 129	80.
81.	531 441 000	533 411 731	535 387 328	537 367 797	539 353 144	541 343 375	543 338 496	545 338 513	547 343 432	549 353 259	81.
82.	551 368 000	553 387 661	555 412 248	557 441 767	559 476 224	561 515 625	563 559 976	565 609 283	567 663 552	569 722 789	82.
83.	571 787 000	573 856 191	575 930 368	578 009 537	580 093 704	582 182 875	584 277 056	586 376 253	588 480 472	590 589 719	83.
84.	592 704 000	594 823 321	596 947 688	599 077 107	601 211 584	603 351 125	605 495 736	607 645 423	609 800 192	611 960 049	84.
85.	614 125 000	616 295 051	618 470 208	620 650 477	622 835 864	625 026 375	627 222 016	629 422 793	631 628 712	633 839 779	85.
86.	636 056 000	638 277 381	640 503 928	642 735 647	644 972 544	647 214 625	649 461 896	651 714 363	653 972 032	656 234 909	86.
87.	658 503 000	660 776 311	663 054 848	665 338 617	667 627 624	669 921 875	672 221 376	674 526 133	676 836 152	679 151 439	87.
88.	681 472 000	683 797 841	686 128 968	688 465 387	690 807 104	693 154 125	695 506 456	697 864 103	700 227 072	702 595 369	88.
89.	704 969 000	707 347 971	709 732 288	712 121 957	714 516 984	716 917 375	719 323 136	721 734 273	724 150 792	726 572 699	89.
90.	729 000 000	731 432 701	733 870 808	736 314 327	738 763 264	741 217 625	743 677 416	746 142 643	748 613 312	751 089 429	90.
91.	753 571 000	756 058 031	758 550 528	761 048 497	763 551 944	766 060 875	768 575 296	771 095 213	773 620 632	776 151 559	91.
92.	778 688 000	781 229 961	783 777 448	786 330 467	788 889 024	791 453 125	794 022 776	796 597 983	799 178 752	801 765 089	92.
93.	804 357 000	806 954 491	809 557 568	812 166 237	814 780 504	817 400 375	820 025 856	822 656 953	825 293 672	827 936 019	93.
94.	830 584 000	833 237 621	835 896 888	838 561 807	841 232 384	843 908 625	846 590 536	849 278 123	851 971 392	854 670 349	94.
95.	857 375 000	860 085 351	862 801 408	865 523 177	868 250 664	870 983 875	873 722 816	876 467 493	879 217 912	881 974 079	95.
96.	884 736 000	887 503 681	890 277 128	893 056 347	895 841 344	898 632 125	901 428 696	904 231 063	907 039 232	909 853 209	96.
97.	912 673 000	915 498 611	918 330 048	921 167 317	924 010 424	926 859 375	929 714 176	932 574 833	935 441 352	938 313 739	97.
98.	941 192 000	944 076 141	946 966 168	949 862 087	952 763 904	955 671 625	958 585 256	961 504 803	964 430 272	967 361 669	98.
99.	970 299 000	973 242 271	976 191 488	979 146 657	982 107 784	985 074 875	988 047 936	991 026 973	994 011 992	997 002 999	99.
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N

Doc 23 — TABLE DES RACINES CUBIQUES $\sqrt[3]{N}$

DES NOMBRES 1 à 499

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0	1,0000	1,2599	1,4422	1,5874	1,7100	1,8171	1,9129	2,0000	2,0801
1.	2,1544	2,2240	2,2894	2,3513	2,4101	2,4662	2,5198	2,5713	2,6207	2,6684
2.	2,7144	2,7589	2,8020	2,8439	2,8845	2,9240	2,9625	3,0000	3,0366	3,0723
3.	3,1072	3,1414	3,1748	3,2075	3,2396	3,2711	3,3019	3,3322	3,3620	3,3912
4.	3,4200	3,4482	3,4760	3,5034	3,5303	3,5569	3,5830	3,6088	3,6342	3,6593
5.	3,6840	3,7084	3,7325	3,7563	3,7798	3,8030	3,8259	3,8485	3,8709	3,8930
6.	3,9149	3,9365	3,9579	3,9791	4,0000	4,0207	4,0412	4,0615	4,0817	4,1016
7.	4,1213	4,1408	4,1602	4,1793	4,1983	4,2172	4,2358	4,2543	4,2727	4,2908
8.	4,3089	4,3267	4,3445	4,3621	4,3795	4,3968	4,4140	4,4310	4,4480	4,4647
9.	4,4814	4,4979	4,5144	4,5307	4,5468	4,5629	4,5789	4,5947	4,6104	4,6261
10.	4,6416	4,6570	4,6723	4,6875	4,7027	4,7177	4,7326	4,7475	4,7622	4,7769
11.	4,7914	4,8059	4,8203	4,8346	4,8488	4,8629	4,8770	4,8910	4,9049	4,9187
12.	4,9324	4,9461	4,9597	4,9732	4,9866	5,0000	5,0133	5,0265	5,0397	5,0528
13.	5,0658	5,0788	5,0916	5,1045	5,1172	5,1299	5,1426	5,1551	5,1676	5,1801
14.	5,1925	5,2048	5,2171	5,2293	5,2415	5,2536	5,2656	5,2776	5,2896	5,3015
15.	5,3133	5,3251	5,3368	5,3485	5,3601	5,3717	5,3832	5,3947	5,4061	5,4175
16.	5,4288	5,4401	5,4514	5,4626	5,4737	5,4848	5,4959	5,5069	5,5178	5,5288
17.	5,5397	5,5505	5,5613	5,5721	5,5828	5,5934	5,6041	5,6147	5,6252	5,6357
18.	5,6462	5,6567	5,6671	5,6774	5,6877	5,6980	5,7083	5,7185	5,7287	5,7388
19.	5,7489	5,7590	5,7690	5,7790	5,7890	5,7989	5,8088	5,8186	5,8285	5,8383
20.	5,8480	5,8578	5,8675	5,8771	5,8868	5,8964	5,9059	5,9155	5,9250	5,9345
21.	5,9439	5,9533	5,9627	5,9721	5,9814	5,9907	6,0000	6,0092	6,0185	6,0277
22.	6,0368	6,0459	6,0550	6,0641	6,0732	6,0822	6,0912	6,1002	6,1091	6,1180
23.	6,1269	6,1358	6,1446	6,1534	6,1622	6,1710	6,1797	6,1885	6,1972	6,2058
24.	6,2145	6,2231	6,2317	6,2403	6,2488	6,2573	6,2658	6,2743	6,2828	6,2912
25.	6,2996	6,3080	6,3164	6,3247	6,3330	6,3413	6,3496	6,3579	6,3661	6,3743
26.	6,3825	6,3907	6,3988	6,4070	6,4151	6,4232	6,4312	6,4393	6,4473	6,4553
27.	6,4633	6,4713	6,4792	6,4872	6,4951	6,5030	6,5108	6,5187	6,5265	6,5343
28.	6,5421	6,5499	6,5577	6,5654	6,5731	6,5808	6,5885	6,5962	6,6039	6,6115
29.	6,6191	6,6267	6,6343	6,6419	6,6494	6,6569	6,6644	6,6719	6,6794	6,6869
30.	6,6943	6,7018	6,7092	6,7166	6,7240	6,7313	6,7387	6,7460	6,7533	6,7606
31.	6,7679	6,7752	6,7824	6,7897	6,7969	6,8041	6,8113	6,8185	6,8256	6,8328
32.	6,8399	6,8470	6,8541	6,8612	6,8683	6,8753	6,8824	6,8894	6,8964	6,9034
33.	6,9104	6,9174	6,9244	6,9313	6,9382	6,9451	6,9521	6,9589	6,9658	6,9727
34.	6,9795	6,9864	6,9932	7,0000	7,0068	7,0136	7,0203	7,0271	7,0338	7,0406
35.	7,0473	7,0540	7,0607	7,0674	7,0740	7,0807	7,0873	7,0940	7,1006	7,1072
36.	7,1138	7,1204	7,1269	7,1335	7,1400	7,1466	7,1531	7,1596	7,1661	7,1726
37.	7,1791	7,1855	7,1920	7,1984	7,2048	7,2112	7,2177	7,2240	7,2304	7,2368
38.	7,2432	7,2495	7,2558	7,2622	7,2685	7,2748	7,2811	7,2874	7,2936	7,2999
39.	7,3061	7,3124	7,3186	7,3248	7,3310	7,3372	7,3434	7,3496	7,3558	7,3619
40.	7,3681	7,3742	7,3803	7,3864	7,3925	7,3986	7,4047	7,4108	7,4169	7,4229
41.	7,4290	7,4350	7,4410	7,4470	7,4530	7,4590	7,4650	7,4710	7,4770	7,4829
42.	7,4889	7,4948	7,5007	7,5067	7,5126	7,5185	7,5244	7,5302	7,5361	7,5420
43.	7,5478	7,5537	7,5595	7,5654	7,5712	7,5770	7,5828	7,5886	7,5944	7,6001
44.	7,6059	7,6117	7,6174	7,6232	7,6289	7,6346	7,6403	7,6460	7,6517	7,6574
45.	7,6631	7,6688	7,6744	7,6801	7,6857	7,6914	7,6970	7,7026	7,7082	7,7138
46.	7,7194	7,7250	7,7306	7,7362	7,7418	7,7473	7,7529	7,7584	7,7639	7,7695
47.	7,7750	7,7805	7,7860	7,7915	7,7970	7,8025	7,8079	7,8134	7,8188	7,8243
48.	7,8297	7,8352	7,8406	7,8460	7,8514	7,8568	7,8622	7,8676	7,8730	7,8784
49.	7,8837	7,8891	7,8944	7,8998	7,9051	7,9105	7,9158	7,9211	7,9264	7,9317

$$\sqrt[3]{N} = a \quad \text{si} \quad a^3 = N$$

① Racine cubique des puissances de 10: *diviser par 3 le nombre de 0*

$\sqrt[3]{1000} = 10 \qquad \sqrt[3]{1000\,000} = 100$

② Racine cubique d'un nombre de 3 chiffres: *lire dans la table*

$\sqrt[3]{490} = 7,8837$

③ Racine cubique d'un nombre ayant 3 chiffres significatifs:

$\sqrt[3]{375\,000} = \sqrt[3]{375} \times \sqrt[3]{1000} = 72,112$

④ Racine cubique d'un nombre décimal

$\sqrt[3]{0,236} = \sqrt{\frac{236}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{236}}{10} = 0,618\,85$

$\sqrt[3]{N}$ TABLE DES RACINES CUBIQUES

DES NOMBRES 500 à 999

Doc 24

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50.	7,9370	7,9423	7,9476	7,9528	7,9581	7,9634	7,9686	7,9739	7,9791	7,9843
51.	7,9896	7,9948	8,0000	8,0052	8,0104	8,0156	8,0208	8,0260	8,0311	8,0363
52.	8,0415	8,0466	8,0517	8,0569	8,0620	8,0671	8,0723	8,0774	8,0825	8,0876
53.	8,0927	8,0978	8,1028	8,1079	8,1130	8,1180	8,1231	8,1281	8,1332	8,1382
54.	8,1433	8,1483	8,1533	8,1583	8,1633	8,1683	8,1733	8,1783	8,1833	8,1882
55.	8,1932	8,1982	8,2031	8,2081	8,2130	8,2180	8,2229	8,2278	8,2327	8,2377
56.	8,2426	8,2475	8,2524	8,2573	8,2621	8,2670	8,2719	8,2768	8,2816	8,2865
57.	8,2913	8,2962	8,3010	8,3059	8,3107	8,3155	8,3203	8,3251	8,3300	8,3348
58.	8,3396	8,3443	8,3491	8,3539	8,3587	8,3634	8,3682	8,3730	8,3777	8,3825
59.	8,3872	8,3919	8,3967	8,4014	8,4061	8,4108	8,4155	8,4202	8,4249	8,4296
60.	8,4343	8,4390	8,4437	8,4484	8,4530	8,4577	8,4623	8,4670	8,4716	8,4763
61.	8,4809	8,4856	8,4902	8,4948	8,4994	8,5040	8,5086	8,5132	8,5178	8,5224
62.	8,5270	8,5316	8,5362	8,5408	8,5453	8,5499	8,5544	8,5590	8,5635	8,5681
63.	8,5726	8,5772	8,5817	8,5862	8,5907	8,5952	8,5997	8,6043	8,6088	8,6132
64.	8,6177	8,6222	8,6267	8,6312	8,6357	8,6401	8,6446	8,6490	8,6535	8,6579
65.	8,6624	8,6668	8,6713	8,6757	8,6801	8,6845	8,6890	8,6934	8,6978	8,7022
66.	8,7066	8,7110	8,7154	8,7198	8,7241	8,7285	8,7329	8,7373	8,7416	8,7460
67.	8,7503	8,7547	8,7590	8,7634	8,7677	8,7721	8,7764	8,7807	8,7850	8,7893
68.	8,7937	8,7980	8,8023	8,8066	8,8109	8,8152	8,8194	8,8237	8,8280	8,8323
69.	8,8366	8,8408	8,8451	8,8493	8,8536	8,8578	8,8621	8,8663	8,8706	8,8748
70.	8,8790	8,8833	8,8875	8,8917	8,8959	8,9001	8,9043	8,9085	8,9127	8,9169
71.	8,9211	8,9253	8,9295	8,9337	8,9378	8,9420	8,9462	8,9503	8,9545	8,9587
72.	8,9628	8,9670	8,9711	8,9752	8,9794	8,9835	8,9876	8,9918	8,9959	9,0000
73.	9,0041	9,0082	9,0123	9,0164	9,0205	9,0246	9,0287	9,0328	9,0369	9,0410
74.	9,0450	9,0491	9,0532	9,0572	9,0613	9,0654	9,0694	9,0735	9,0775	9,0816
75.	9,0856	9,0896	9,0937	9,0977	9,1017	9,1057	9,1098	9,1138	9,1178	9,1218
76.	9,1258	9,1298	9,1338	9,1378	9,1418	9,1458	9,1498	9,1537	9,1577	9,1617
77.	9,1657	9,1696	9,1736	9,1775	9,1815	9,1855	9,1894	9,1933	9,1973	9,2012
78.	9,2052	9,2091	9,2130	9,2170	9,2209	9,2248	9,2287	9,2326	9,2365	9,2404
79.	9,2443	9,2482	9,2521	9,2560	9,2599	9,2638	9,2677	9,2716	9,2754	9,2793
80.	9,2832	9,2870	9,2909	9,2948	9,2986	9,3025	9,3063	9,3102	9,3140	9,3179
81.	9,3217	9,3255	9,3294	9,3332	9,3370	9,3408	9,3447	9,3485	9,3523	9,3561
82.	9,3599	9,3637	9,3675	9,3713	9,3751	9,3789	9,3827	9,3865	9,3902	9,3940
83.	9,3978	9,4016	9,4053	9,4091	9,4129	9,4166	9,4204	9,4241	9,4279	9,4316
84.	9,4354	9,4391	9,4429	9,4466	9,4503	9,4541	9,4578	9,4615	9,4652	9,4690
85.	9,4727	9,4764	9,4801	9,4838	9,4875	9,4912	9,4949	9,4986	9,5023	9,5060
86.	9,5097	9,5134	9,5171	9,5207	9,5244	9,5281	9,5317	9,5354	9,5391	9,5427
87.	9,5464	9,5501	9,5537	9,5574	9,5610	9,5647	9,5683	9,5719	9,5756	9,5792
88.	9,5828	9,5865	9,5901	9,5937	9,5973	9,6010	9,6046	9,6082	9,6118	9,6154
89.	9,6190	9,6226	9,6262	9,6298	9,6334	9,6370	9,6406	9,6442	9,6477	9,6513
90.	9,6549	9,6585	9,6620	9,6656	9,6692	9,6727	9,6763	9,6799	9,6834	9,6870
91.	9,6905	9,6941	9,6976	9,7012	9,7047	9,7082	9,7118	9,7153	9,7188	9,7224
92.	9,7259	9,7294	9,7329	9,7364	9,7400	9,7435	9,7470	9,7505	9,7540	9,7575
93.	9,7610	9,7645	9,7680	9,7715	9,7750	9,7785	9,7819	9,7854	9,7889	9,7924
94.	9,7959	9,7993	9,8028	9,8063	9,8097	9,8132	9,8167	9,8201	9,8236	9,8270
95.	9,8305	9,8339	9,8374	9,8408	9,8443	9,8477	9,8511	9,8546	9,8580	9,8614
96.	9,8648	9,8683	9,8717	9,8751	9,8785	9,8819	9,8854	9,8888	9,8922	9,8956
97.	9,8990	9,9024	9,9058	9,9092	9,9126	9,9160	9,9194	9,9227	9,9261	9,9295
98.	9,9329	9,9363	9,9396	9,9430	9,9464	9,9497	9,9531	9,9565	9,9598	9,9632
99.	9,9666	9,9699	9,9733	9,9766	9,9800	9,9833	9,9866	9,9900	9,9933	9,9967

UTILISATION DE LA TABLE

Calcul du diamètre d'une sphère connaissant son volume

Formule

$V = \frac{\pi \times d^3}{6}$

(voir Doc 43)

$\left(\text{avec } \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 1{,}132\right)$

$d^3 = \frac{V \times 6}{\pi}$

$= V \times \frac{6}{\pi}$

$d = \sqrt[3]{V} \times \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$

$d = \sqrt[3]{V} \times 1{,}132$

Applications numériques

① $V = 536\ \text{cm}^3$

$d = \sqrt[3]{536} \times 1{,}132$

$d = 8{,}1231 \times 1{,}132$

$\simeq 9{,}20\ \text{cm}$

② $V = 0{,}041\ \text{m}^3$

$d = \sqrt[3]{0{,}041} \times 1{,}132$

$d = 0{,}344\,82 \times 1{,}132$

$\simeq 0{,}39\ \text{m}$

Doc 25

INVERSES

DES NOMBRES 1 à 499

$\frac{1}{N}$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0, 1	0, 500 000	0, 333 333	0, 250 000	0, 200 000	0, 166 667	0, 142 857	0, 125 000	0, 111 111
0.										
1.	100 000	090 909	083 333	076 923	071 429	066 667	062 500	058 824	055 556	052 632
2.	050 000	047 619	045 455	043 478	041 667	040 000	038 462	037 037	035 714	034 483
3.	033 333	032 258	031 250	030 303	029 412	028 571	027 778	027 027	026 316	025 641
4.	025 000	024 390	023 810	023 256	022 727	022 222	021 739	021 277	020 833	020 408
5.	020 000	019 608	019 231	018 868	018 519	018 182	017 857	017 544	017 241	016 949
6.	016 667	016 393	016 129	015 873	015 625	015 385	015 152	014 925	014 706	014 493
7.	014 286	014 085	013 889	013 699	013 514	013 333	013 158	012 987	012 821	012 658
8.	012 500	012 346	012 195	012 048	011 905	011 765	011 628	011 494	011 364	011 236
9.	011 111	010 989	010 870	010 753	010 638	010 526	010 417	010 309	010 204	010 101
10.	010 000	009 901	009 804	009 709	009 615	009 524	009 434	009 346	009 259	009 174
11.	009 091	009 009	008 929	008 850	008 772	008 696	008 621	008 547	008 475	008 403
12.	008 333	008 264	008 197	008 130	008 065	008 000	007 937	007 874	007 813	007 752
13.	007 692	007 634	007 576	007 519	007 463	007 407	007 353	007 299	007 246	007 194
14.	007 143	007 092	007 042	006 993	006 944	006 897	006 849	006 803	006 757	006 711
15.	006 667	006 623	006 579	006 536	006 494	006 452	006 410	006 369	006 329	006 289
16.	006 250	006 211	006 173	006 135	006 098	006 061	006 024	005 988	005 952	005 917
17.	005 882	005 848	005 814	005 780	005 747	005 714	005 682	005 650	005 618	005 587
18.	005 556	005 525	005 495	005 464	005 435	005 405	005 376	005 348	005 319	005 291
19.	005 263	005 236	005 208	005 181	005 155	005 128	005 102	005 076	005 051	005 025
20.	005 000	004 975	004 950	004 926	004 902	004 878	004 854	004 831	004 808	004 785
21.	004 762	004 739	004 717	004 695	004 673	004 651	004 630	004 608	004 587	004 566
22.	004 545	004 525	004 505	004 484	004 464	004 444	004 425	004 405	004 386	004 367
23.	004 348	004 329	004 310	004 292	004 274	004 255	004 237	004 219	004 202	004 184
24.	004 167	004 149	004 132	004 115	004 098	004 082	004 065	004 049	004 032	004 016
25.	004 000	003 984	003 968	003 953	003 937	003 922	003 906	003 891	003 876	003 861
26.	003 846	003 831	003 817	003 802	003 788	003 774	003 759	003 745	003 731	003 717
27.	003 704	003 690	003 676	003 663	003 650	003 636	003 623	003 610	003 597	003 584
28.	003 571	003 559	003 546	003 534	003 521	003 509	003 497	003 484	003 472	003 460
29.	003 448	003 436	003 425	003 413	003 401	003 390	003 378	003 367	003 356	003 344
30.	003 333	003 322	003 311	003 300	003 289	003 279	003 268	003 257	003 247	003 236
31.	003 226	003 215	003 205	003 195	003 185	003 175	003 165	003 155	003 145	003 135
32.	003 125	003 115	003 106	003 096	003 086	003 077	003 067	003 058	003 049	003 040
33.	003 030	003 021	003 012	003 003	002 994	002 985	002 976	002 967	002 959	002 950
34.	002 941	002 933	002 924	002 915	002 907	002 899	002 890	002 882	002 874	002 865
35.	002 857	002 849	002 841	002 833	002 825	002 817	002 809	002 801	002 793	002 786
36.	002 778	002 770	002 762	002 755	002 747	002 740	002 732	002 725	002 717	002 710
37.	002 703	002 695	002 688	002 681	002 674	002 667	002 660	002 653	002 646	002 639
38.	002 632	002 625	002 618	002 611	002 604	002 597	002 591	002 584	002 577	002 571
39.	002 564	002 558	002 551	002 545	002 538	002 532	002 525	002 519	002 513	002 506
40.	002 500	002 494	002 488	002 481	002 475	002 469	002 463	002 457	002 451	002 445
41.	002 439	002 433	002 427	002 421	002 415	002 410	002 404	002 398	002 392	002 387
42.	002 381	002 375	002 370	002 364	002 358	002 353	002 347	002 342	002 336	002 331
43.	002 326	002 320	002 315	002 309	002 304	002 299	002 294	002 288	002 283	002 278
44.	002 273	002 268	002 262	002 257	002 252	002 247	002 242	002 237	002 232	002 227
45.	002 222	002 217	002 212	002 208	002 203	002 198	002 193	002 188	002 183	002 179
46.	002 174	002 169	002 165	002 160	002 155	002 151	002 146	002 141	002 137	002 132
47.	002 128	002 123	002 119	002 114	002 110	002 105	002 101	002 096	002 092	002 088
48.	002 083	002 079	002 075	002 070	002 066	002 062	002 058	002 053	002 049	002 045
49.	002 041	002 037	002 033	002 028	002 024	002 020	002 016	002 012	002 008	002 004

UTILISATION DE LA TABLE

① Au lieu de diviser par un nombre N, on multiplie par $\frac{1}{N}$, l'inverse du nombre

$$A : N = A \times \frac{1}{N}$$

Exemple: $\underline{52:43} = 52 \times \frac{1}{43}$

$= 52 \times 0{,}023\,256$

$= \underline{1{,}209\,3}$

UN CAS USUEL

② Au lieu de diviser par π, on multiplie par l'inverse de π

$\pi = 3{,}141\,59\ldots$ $\quad \frac{1}{\pi} = 0{,}318\,31\ldots$

Exemple: $\underline{420:\pi} = 420 \times \frac{1}{\pi}$

$= 420 \times 0{,}318\,3$

$= \underline{133{,}68}$

$\frac{1}{N}$ INVERSES
DES NOMBRES 500 à 999

Doc 26

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
50.	002 000	001 996	001 992	001 988	001 984	001 980	001 976	001 972	001 969	001 965
51.	001 961	001 957	001 953	001 949	001 946	001 942	001 938	001 934	001 931	001 927
52.	001 923	001 919	001 916	001 912	001 908	001 905	001 901	001 898	001 894	001 890
53.	001 887	001 883	001 880	001 876	001 873	001 869	001 866	001 862	001 859	001 855
54.	001 852	001 848	001 845	001 842	001 838	001 835	001 832	001 828	001 825	001 821
55.	001 818	001 815	001 812	001 808	001 805	001 802	001 799	001 795	001 792	001 789
56.	001 786	001 783	001 779	001 776	001 773	001 770	001 767	001 764	001 761	001 757
57.	001 754	001 751	001 748	001 745	001 742	001 739	001 736	001 733	001 730	001 727
58.	001 724	001 721	001 718	001 715	001 712	001 709	001 706	001 704	001 701	001 698
59.	001 695	001 692	001 689	001 686	001 684	001 681	001 678	001 675	001 672	001 669
60.	001 667	001 664	001 661	001 658	001 656	001 653	001 650	001 647	001 645	001 642
61.	001 639	001 637	001 634	001 631	001 629	001 626	001 623	001 621	001 618	001 616
62.	001 613	001 610	001 608	001 605	001 603	001 600	001 597	001 595	001 592	001 590
63.	001 587	001 585	001 582	001 580	001 577	001 575	001 572	001 570	001 567	001 565
64.	001 563	001 560	001 558	001 555	001 553	001 550	001 548	001 546	001 543	001 541
65.	001 538	001 536	001 534	001 531	001 529	001 527	001 524	001 522	001 520	001 517
66.	001 515	001 513	001 511	001 508	001 506	001 504	001 502	001 499	001 497	001 495
67.	001 493	001 490	001 488	001 486	001 484	001 481	001 479	001 477	001 475	001 473
68.	001 471	001 468	001 466	001 464	001 462	001 460	001 458	001 456	001 453	001 451
69.	001 449	001 447	001 445	001 443	001 441	001 439	001 437	001 435	001 433	001 431
70.	001 429	001 427	001 425	001 422	001 420	001 418	001 416	001 414	001 412	001 410
71.	001 408	001 406	001 404	001 403	001 401	001 399	001 397	001 395	001 393	001 391
72.	001 389	001 387	001 385	001 383	001 381	001 379	001 377	001 376	001 374	001 372
73.	001 370	001 368	001 366	001 364	001 362	001 361	001 359	001 357	001 355	001 353
74.	001 351	001 350	001 348	001 346	001 344	001 342	001 340	001 339	001 337	001 335
75.	001 333	001 332	001 330	001 328	001 326	001 325	001 323	001 321	001 319	001 318
76.	001 316	001 314	001 312	001 311	001 309	001 307	001 305	001 304	001 302	001 300
77.	001 299	001 297	001 295	001 294	001 292	001 290	001 289	001 287	001 285	001 284
78.	001 282	001 280	001 279	001 277	001 276	001 274	001 272	001 271	001 269	001 267
79.	001 266	001 264	001 263	001 261	001 259	001 258	001 256	001 255	001 253	001 252
80.	001 250	001 248	001 247	001 245	001 244	001 242	001 241	001 239	001 238	001 236
81.	001 235	001 233	001 232	001 230	001 229	001 227	001 225	001 224	001 222	001 221
82.	001 220	001 218	001 217	001 215	001 214	001 212	001 211	001 209	001 208	001 206
83.	001 205	001 203	001 202	001 200	001 199	001 198	001 196	001 195	001 193	001 192
84.	001 190	001 189	001 188	001 186	001 185	001 183	001 182	001 181	001 179	001 178
85.	001 176	001 175	001 174	001 172	001 171	001 170	001 168	001 167	001 166	001 164
86.	001 163	001 161	001 160	001 159	001 157	001 156	001 155	001 153	001 152	001 151
87.	001 149	001 148	001 147	001 145	001 144	001 143	001 142	001 140	001 139	001 138
88.	001 136	001 135	001 134	001 133	001 131	001 130	001 129	001 127	001 126	001 125
89.	001 124	001 122	001 121	001 120	001 119	001 117	001 116	001 115	001 114	001 112
90.	001 111	001 110	001 109	001 107	001 106	001 105	001 104	001 103	001 101	001 100
91.	001 099	001 098	001 096	001 095	001 094	001 093	001 092	001 091	001 089	001 088
92.	001 087	001 086	001 085	001 083	001 082	001 081	001 080	001 079	001 078	001 076
93.	001 075	001 074	001 073	001 072	001 071	001 070	001 068	001 067	001 066	001 065
94.	001 064	001 063	001 062	001 060	001 059	001 058	001 057	001 056	001 055	001 054
95.	001 053	001 052	001 050	001 049	001 048	001 047	001 046	001 045	001 044	001 043
96.	001 042	001 041	001 040	001 038	001 037	001 036	001 035	001 034	001 033	001 032
97.	001 031	001 030	001 029	001 028	001 027	001 026	001 025	001 024	001 022	001 021
98.	001 020	001 019	001 018	001 017	001 016	001 015	001 014	001 013	001 012	001 011
99.	001 010	001 009	001 008	001 007	001 006	001 005	001 004	001 003	001 002	001 001

CALCULS TRIGONOMÉTRIQUES

① *Exemple:* Au lieu de diviser par $\sin x$, on multiplie par $\frac{1}{\sin x}$

35 : sin 40° ?

= 35 : 0,6428 ≃ 35 : 0,643

= 35 × 1,555 = 54,4

② *Exemple:* Au lieu de diviser par $\cos x$, on multiplie par $\frac{1}{\cos x}$

490 : cos 81° ?

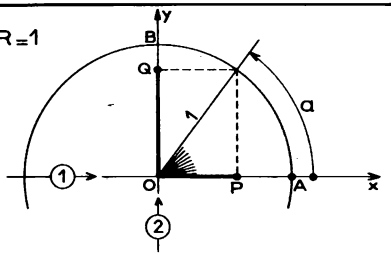
= 490 : 0,990

= 490 × 1,01 = 494,9

Doc 27

FONCTIONS CIRCULAIRES

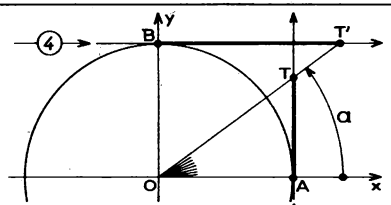
DÉFINITIONS



$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

① Axe des cosinus $\cos a = \overline{OP}$

② Axe des sinus $\sin a = \overline{OQ}$



$\text{tg}\, a = \frac{\sin a}{\cos a}$

$\text{cotg}\, a = \frac{\cos a}{\sin a}$

$\text{tg}\, a \times \text{cotg}\, a = 1$

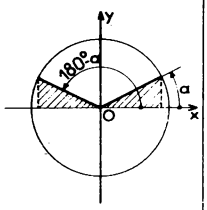
③ Axe des tangentes $\text{tg}\, a = \overline{AT}$

④ Axe des cotangentes $\text{cotg}\, a = \overline{BT'}$

VALEURS USUELLES

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$ =0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ =0,707	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ =0,866	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ =0,866	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ =0,707	$\frac{1}{2}$ =0,5	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ =0,577	1	$\sqrt{3}$ =1,732	∞
cotg	∞	$\sqrt{3}$ =1,732	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ =0,577	0

ANGLES ASSOCIÉS



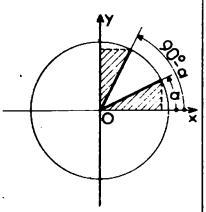
SOMME = 180° (supplémentaires)

$\sin(180°-a) = \sin a$

$\cos(180°-a) = -\cos a$

$\text{tg}(180°-a) = -\text{tg}\, a$

$\text{cotg}(180°-a) = -\text{cotg}\, a$



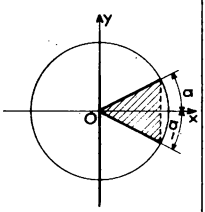
SOMME = 90° (complémentaires)

$\sin(90°-a) = \cos a$

$\cos(90°-a) = \sin a$

$\text{tg}(90°-a) = \text{cotg}\, a$

$\text{cotg}(90°-a) = \text{tg}\, a$



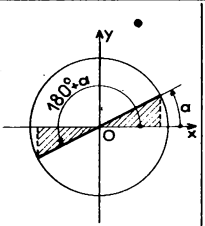
SOMME = 0° (opposés)

$\sin(-a) = -\sin a$

$\cos(-a) = \cos a$

$\text{tg}(-a) = -\text{tg}\, a$

$\text{cotg}(-a) = -\text{cotg}\, a$



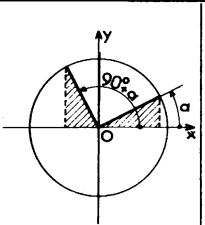
DIFFÉRENCE = 180°

$\sin(180°+a) = -\sin a$

$\cos(180°+a) = -\cos a$

$\text{tg}(180°+a) = \text{tg}\, a$

$\text{cotg}(180°+a) = \text{cotg}\, a$



DIFFÉRENCE = 90°

$\sin(90°+a) = \cos a$

$\cos(90°+a) = -\sin a$

$\text{tg}(90°+a) = -\text{cotg}\, a$

$\text{cotg}(90°+a) = -\text{tg}\, a$

TRANSFORMATIONS TRIGO

Doc 28

① ÉQUATIONS ÉLÉMENTAIRES

a et x en degrés, k:nombre algébrique entier.

$$\sin x = \sin a \begin{cases} x = a + 180° \times 2k \\ \text{ou} \\ x = (180° - a) + 180° \times 2k \end{cases}$$

$$\cos x = \cos a \begin{cases} x = \pm a + 180° \times 2k \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \quad \begin{cases} x = a + 180° \times k \end{cases}$$

Expression de cos a et sin a :

$$\cos a = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}} \qquad \cos a = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\varepsilon\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}} \qquad \sin a = \frac{2\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

$(\varepsilon = +1 \text{ ou } \varepsilon = -1)$ $\qquad \operatorname{tg} a = \frac{2\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$

② FORMULES D'ADDITION

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

③ SOMMES EN PRODUITS

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin p \pm q}{\cos p \cos q}$$

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}$$

④ FORMULES DE MULTIPLICATION

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\begin{cases} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

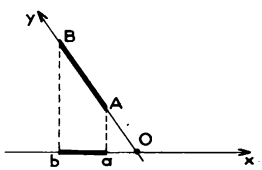
$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$$

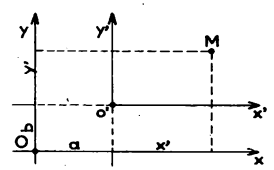
⑤ APPLICATIONS

Projection d'un vecteur



$$\overline{ab} = \overline{AB}\cos(\vec{ox}, \vec{oy})$$

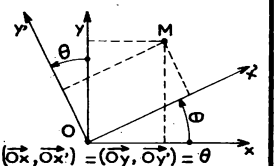
Translation des axes



$$x = x' + a$$

$$y = y' + b$$

Rotation des axes



$$(\vec{ox}, \vec{ox'}) = (\vec{oy}, \vec{oy'}) = \theta$$

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

Doc 29 — **SINUS 0° à 45°** — **S**

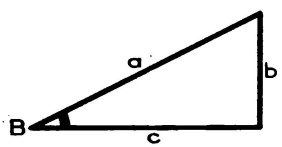
Degrés	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	Degrés
	Minutes							
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0611	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	85
5	0,0872	0,0901	0,0930	0,0959	0,0987	0,1016	0,1045	84
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1651	0,1679	0,1708	0,1737	80
10	0,1737	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2335	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	75
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3063	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3366	0,3393	0,3420	70
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3988	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	65
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	64
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4618	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	60
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	55
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	50
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6495	0,6517	0,6539	0,6561	49
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6968	0,6988	0,7009	0,7030	0,7051	0,7071	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Degrés
				Minutes				

COSINUS 45° à 90°

$\sin\hat{B} = \frac{b}{a}$

$b = a \sin\hat{B}$

$a = \frac{b}{\sin\hat{B}}$



$\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$

$c = a \cos\hat{B}$

$a = \frac{c}{\cos\hat{B}}$

S — SINUS 45° à 90°

Doc 30

Degrés	Minutes 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7132	0,7153	0,7173	0,7193	44
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7313	43
47	0,7313	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	40
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7933	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8191	35
55	0,8191	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8481	32
58	0,8481	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8602	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	30
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8830	28
62	0,8830	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	25
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9136	24
66	0,9136	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9357	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	20
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9501	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0,9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9629	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	15
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9682	0,9689	0,9696	0,9703	14
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0,9782	12
78	0,9782	0,9788	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9832	0,9838	0,9843	0,9848	10
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	5
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Degrés
				Minutes				

COSINUS 0° à 45°

LECTURE DIRECTE	CALCUL UTILISANT LA DIFFERENCE TABULAIRE	LECTURE DIRECTE
Exemple: sin 20°10' = 0,3448	sin 20°16'	Exemple: cos 25°40' = 0,9013
A retenir sin 30° = 0,5 sin 45° = 0,707 sin 60° = 0,866	sin 20°20' = 0,3475 sin 20°10' = 0,3448 différence 10' Δ = 27 pour 6 = $\frac{27 \times 6}{10}$ = 16 différence Δ' = 0,0016 sin 20°10' = 0,3448 sin 20°16' = 0,3464	A retenir cos 30° = 0,866 cos 45° = 0,707 cos 60° = 0,5

Doc 31

TANGENTE 0° à 45°

T

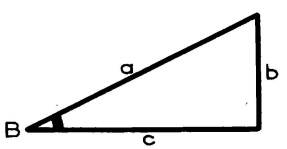
Degrés	Minutes 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495	0,0524	87
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670	0,0699	86
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	85
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84
6	0,1051	0,1081	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198	0,1228	83
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376	0,1405	82
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554	0,1584	81
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	80
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1884	0,1914	0,1944	79
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095	0,2126	78
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2248	0,2278	0,2309	77
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462	0,2493	76
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2586	0,2617	0,2648	0,2680	75
15	0,2680	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2868	74
16	0,2868	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3027	0,3057	73
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217	0,3249	72
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411	0,3443	71
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	70
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4007	0,4040	68
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4211	0,4245	67
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4418	0,4452	66
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	65
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059	0,5095	63
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5206	0,5243	0,5280	0,5317	62
28	0,5317	0,5355	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505	0,5543	61
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0,5735	0,5774	60
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5891	0,5930	0,5969	0,6009	59
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208	0,6249	58
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453	0,6494	57
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703	0,6745	56
34	0,6745	0,6788	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	55
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490	0,7536	53
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766	0,7813	52
38	0,7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050	0,8098	51
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	50
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952	0,9004	48
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271	0,9325	47
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601	0,9657	46
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	45
	60'	50'	40'	30' Minutes	20'	10'	0'	Degrés

COTANGENTE 45° à 90°

$$tg\widehat{B} = \frac{b}{c}$$

$$b = c\ tg\widehat{B}$$

$$c = \frac{b}{tg\widehat{B}}$$



$$cotg\widehat{B} = \frac{c}{b}$$

$$b = \frac{c}{cotg\widehat{B}}$$

$$c = b\ cotg\widehat{B}$$

T — TANGENTE 45° à 90°

Doc 32

Degrés	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	Degrés
				Minutes				
45	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0236	1,0295	1,0355	44
46	1,0355	1,0416	1,0477	1,0538	1,0599	1,0661	1,0724	43
47	1,0724	1,0786	1,0850	1,0913	1,0977	1,1041	1,1106	42
48	1,1106	1,1171	1,1237	1,1303	1,1369	1,1436	1,1504	41
49	1,1504	1,1572	1,1640	1,1709	1,1778	1,1847	1,1918	40
50	1,1918	1,1988	1,2059	1,2131	1,2203	1,2276	1,2349	39
51	1,2349	1,2423	1,2497	1,2572	1,2647	1,2723	1,2799	38
52	1,2799	1,2876	1,2954	1,3032	1,3111	1,3190	1,3270	37
53	1,3270	1,3351	1,3432	1,3514	1,3597	1,3680	1,3764	36
54	1,3764	1,3848	1,3934	1,4020	1,4106	1,4193	1,4281	35
55	1,4281	1,4370	1,4460	1,4550	1,4641	1,4733	1,4826	34
56	1,4826	1,4919	1,5013	1,5108	1,5204	1,5301	1,5399	33
57	1,5399	1,5497	1,5597	1,5697	1,5798	1,5900	1,6003	32
58	1,6003	1,6107	1,6213	1,6319	1,6426	1,6534	1,6643	31
59	1,6643	1,6753	1,6864	1,6977	1,7090	1,7205	1,7321	30
60	1,7321	1,7438	1,7556	1,7675	1,7796	1,7917	1,8041	29
61	1,8041	1,8165	1,8291	1,8418	1,8546	1,8676	1,8807	28
62	1,8807	1,8940	1,9074	1,9210	1,9347	1,9486	1,9626	27
63	1,9626	1,9768	1,9912	2,0057	2,0204	2,0353	2,0503	26
64	2,0503	2,0655	2,0809	2,0965	2,1123	2,1283	2,1445	25
65	2,1445	2,1609	2,1775	2,1943	2,2113	2,2286	2,2460	24
66	2,2460	2,2637	2,2817	2,2998	2,3183	2,3369	2,3559	23
67	2,3559	2,3750	2,3945	2,4142	2,4342	2,4545	2,4751	22
68	2,4751	2,4960	2,5172	2,5387	2,5605	2,5826	2,6051	21
69	2,6051	2,6279	2,6511	2,6746	2,6985	2,7228	2,7475	20
70	2,7475	2,7725	2,7980	2,8239	2,8502	2,8770	2,9042	19
71	2,9042	2,9319	2,9600	2,9887	3,0178	3,0475	3,0777	18
72	3,0777	3,1084	3,1397	3,1716	3,2041	3,2371	3,2709	17
73	3,2709	3,3052	3,3402	3,3759	3,4124	3,4495	3,4874	16
74	3,4874	3,5261	3,5656	3,6059	3,6471	3,6891	3,7321	15
75	3,7321	3,7760	3,8208	3,8667	3,9136	3,9617	4,0108	14
76	4,0108	4,0611	4,1126	4,1653	4,2193	4,2747	4,3315	13
77	4,3315	4,3897	4,4494	4,5107	4,5736	4,6383	4,7046	12
78	4,7046	4,7729	4,8430	4,9152	4,9894	5,0658	5,1446	11
79	5,1446	5,2257	5,3093	5,3955	5,4845	5,5764	5,6713	10
80	5,6713	5,7694	5,8708	5,9758	6,0844	6,1970	6,3138	9
81	6,3138	6,4348	6,5606	6,6912	6,8269	6,9682	7,1154	8
82	7,1154	7,2687	7,4287	7,5958	7,7704	7,9530	8,1444	7
83	8,1444	8,3450	8,5556	8,7769	9,0098	9,2553	9,5144	6
84	9,5144	9,7882	10,0780	10,3854	10,7119	11,0594	11,4301	5
85	11,4301	11,8262	12,2505	12,7062	13,1969	13,7267	14,3007	4
86	14,3007	14,9244	15,6048	16,3499	17,1693	18,0750	19,0811	3
87	19,0811	20,2056	21,4704	22,9038	24,5418	26,4316	28,6363	2
88	28,6363	31,2416	34,3678	38,1885	42,9641	49,1039	57,2900	1
89	57,2900	68,7501	85,9398	114,5887	171,8854	343,7737		0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Degrés
				Minutes				

COTANGENTE 0° à 45°

LECTURE DIRECTE	CONVERSION	LECTURE DIRECTE
tg 23°40' = 0,4383	Pente en % ⟷ Angle en degrés	cotg 39°10' = 1,2276
A retenir		A retenir
tg 30° = 0,5773	Pente = tg ∝ × 100	cotg 30° = 1,7320
tg 45° = 1,0000	Exemple :	cotg 45° = 1,0000
tg 60° = 1,7320	∝ = 6° Pente = tg 6° × 100 = 10,51 %	cotg 60° = 0,5773

Doc 33 — DEGRÉS, GRADES, RADIANS (°) (gr) (rd)

gr—rd

① DEGRÉS EN RADIANS

°	rd
1	0,017 45
2	0,034 91
3	0,052 36
4	0,069 81
5	0,087 27
6	0,104 72
7	0,122 17
8	0,139 63
9	0,157 08
1′ =	0,000 29 rd
1″ =	0,000 005 rd

Exemple: 62°32′

60°	1,047 2
2°	0,034 91
30′	0,008 7
2′	0,000 58
	1,091 39

62°32′ = 1,0914 rd

② GRADES EN RADIANS

gr	rd
1	0,015 71
2	0,031 42
3	0,047 12
4	0,062 83
5	0,078 54
6	0,094 25
7	0,109 96
8	0,125 66
9	0,141 37
1 dgr =	0,001 57 rd
1 cgr =	0,000 16 rd

Exemple: 29,43 gr

20 gr	0,314 2
9 gr	0,141 37
4 dgr	0,006 28
3 cgr	0,000 48
	0,462 33

29,43 gr = 0,4623 rd

③ RADIANS EN DEGRÉS

0,1 rd	°	0,01 rd	°	0,001 rd	°
1	5°43′46″	1	34′23″	1	3′26″
2	11°27′33″	2	1°08′45″	2	6′53″
3	17°11′19″	3	1°43′08″	3	10′19″
4	22°55′06″	4	2°17′31″	4	13′45″
5	28°38′52″	5	2°51′53″	5	17′11″
6	34°22′39″	6	3°26′16″	6	20′37″
7	40°06′25″	7	4°00′39″	7	24′04″
8	45°50′12″	8	4°35′01″	8	27′30″
9	51°33′58″	9	5°09′24″	9	30′56″
10	57°17′45″	10	5°43′46″	10	34′23″

Exemple: 0,25 rd

0,2 rd	11°27′33″
0,05 rd	2°51′53″
	14°19′26″

0,25 rd = 14°19′26″

④ RADIANS EN GRADES

0,1 rd	gr	0,01 rd	gr	0,001 rd	gr
1	6,366	1	0,637	1	0,064
2	12,732	2	1,273	2	0,127
3	19,099	3	1,910	3	0,191
4	25,465	4	2,547	4	0,255
5	31,831	5	3,183	5	0,318
6	38,197	6	3,820	6	0,382
7	44,563	7	4,456	7	0,446
8	50,930	8	5,093	8	0,509
9	57,296	9	5,730	9	0,573
10	63,662	10	6,366	10	0,637

Exemple: 1,467 rd

1 rd	63,66
0,4 rd	25,465
0,06 rd	3,820
0,007 rd	0,446
	93,391

1,467 rd ≃ 93,39 gr

⑤ PETITS ANGLES (≤ 0,1 rd ou 5°40′)

L'angle x est exprimé en rd

Résultats avec 4 ou même 5 chiffres exacts

$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{6}$

$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$

$\operatorname{tg} x \simeq x + \frac{x^3}{3}$

$x \simeq \sin x + \frac{\sin^3 x}{6}$

$x \simeq \sqrt{2 - 2\cos x}$

$x \simeq \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3}$

Utiliser:

- *les tables de conversion*
- *les tables des carrés et des cubes*

gr	GRADES				Doc 34
⇩	SINUS	COSINUS	TANGENTE	COTANGENTE	⇧
1	0,0157	0,9999	0,0157	63,657	99
2	0,0314	0,9995	0,0314	31,821	98
3	0,0471	0,9989	0,0472	21,205	97
4	0,0628	0,9981	0,0629	15,895	96
5	0,0785	0,9969	0,0787	12,706	95
6	0,0941	0,9956	0,0945	10,579	94
7	0,1097	0,9940	0,1104	9,0579	93
8	0,1253	0,9921	0,1263	7,9158	92
9	0,1409	0,9900	0,1423	7,0264	91
10	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	90
11	0,1719	0,9851	0,1745	5,7297	89
12	0,1874	0,9823	0,1908	5,2422	88
13	0,2028	0,9792	0,2071	4,8288	87
14	0,2181	0,9759	0,2235	4,4737	86
15	0,2334	0,9724	0,2401	4,1653	85
16	0,2487	0,9686	0,2568	3,8947	84
17	0,2639	0,9646	0,2736	3,6554	83
18	0,2790	0,9603	0,2905	3,4420	82
19	0,2940	0,9558	0,3076	3,2506	81
20	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	80
21	0,3239	0,9461	0,3424	2,9208	79
22	0,3387	0,9409	0,3600	2,7776	78
23	0,3535	0,9354	0,3779	2,6464	77
24	0,3681	0,9298	0,3959	2,5257	76
25	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142	75
26	0,3971	0,9178	0,4327	2,3109	74
27	0,4115	0,9114	0,4515	2,2148	73
28	0,4258	0,9048	0,4706	2,1251	72
29	0,4399	0,8980	0,4899	2,0413	71
30	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	70
31	0,4679	0,8838	0,5295	1,8887	69
32	0,4818	0,8763	0,5498	1,8190	68
33	0,4955	0,8686	0,5704	1,7532	67
34	0,5090	0,8607	0,5914	1,6909	66
35	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319	65
36	0,5358	0,8443	0,6346	1,5757	64
37	0,5490	0,8358	0,6569	1,5224	63
38	0,5621	0,8271	0,6796	1,4715	62
39	0,5750	0,8181	0,7028	1,4229	61
40	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	60
41	0,6004	0,7997	0,7508	1,3319	59
42	0,6129	0,7902	0,7757	1,2892	58
43	0,6252	0,7804	0,8012	1,2482	57
44	0,6374	0,7705	0,8273	1,2088	56
45	0,6494	0,7604	0,8541	1,1709	55
46	0,6613	0,7501	0,8816	1,1343	54
47	0,6730	0,7396	0,9099	1,0990	53
48	0,6845	0,7290	0,9391	1,0649	52
49	0,6959	0,7181	0,9619	1,0319	51
50	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	50
⇩	COSINUS	SINUS	COTANGENTE	TANGENTE	⇧

Exemple : sin 25,37 gr ?

sin 25 gr = 0,3827
sin 26 gr = 0,3971
Δ = 144
pour 0,37 gr :
Δ' = 144 × 0,37 = 53

sin 25,37 gr = 0,3880

Exemple : cotg 41,72 gr ?

cotg 41 gr = 1,3319
cotg 42 gr = 1,2892
Δ = −427
pour 0,72 gr :
Δ' = (−427) × 0,72 = −307

cotg 41,72 gr = 1,3012

Doc 35

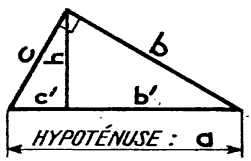
TRIANGLE RECTANGLE

RELATIONS MÉTRIQUES

$a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

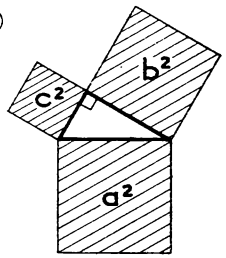
$c^2 = a^2 - b^2$

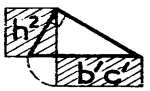


$b^2 = ab'$

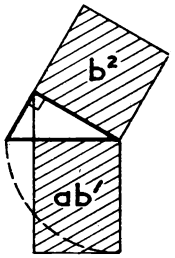
$c^2 = ac'$

$h = \frac{bc}{a}$

① 

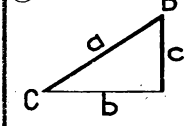
② 

$h^2 = b'c'$

③ 

Exemple : $b = 12$, $c = 15$	*Exemple :* $b' = 14$, $c' = 5$	*Exemple :* $b' = 6$, $c' = 10$
$a^2 = 12^2 + 15^2 = 369$	$h^2 = 14 \times 5 = 70$	$b^2 = 16 \times 6 = 96$; $b = \sqrt{96}$
$a = \sqrt{369} = 19{,}21$	$h = \sqrt{70} = 8{,}37$	$c^2 = 16 \times 10 = 160$; $c = \sqrt{160}$

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

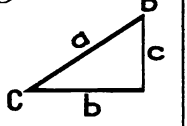
④ 

On connait a *et* c

$\sin \hat{C} = c : a$

$\cos \hat{B} = c : a$

$b = c \operatorname{tg} \hat{B}$

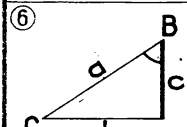
⑤ 

On connait a *et* b

$\sin \hat{B} = b : a$

$\cos \hat{C} = b : a$

$c = b \operatorname{tg} \hat{C}$

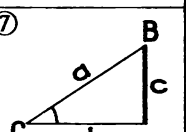
⑥ 

On connait c *et* $\hat{B}$

$\hat{C} = 90^0 - \hat{B}$

$a = c : \cos \hat{B}$

$b = c \operatorname{tg} \hat{B}$

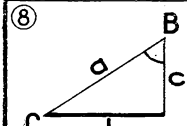
⑦ 

On connait c *et* $\hat{C}$

$\hat{B} = 90^0 - \hat{C}$

$a = c : \sin \hat{C}$

$b = c \operatorname{cotg} \hat{C}$

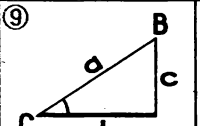
⑧ 

On connait b *et* $\hat{B}$

$\hat{C} = 90^0 - \hat{B}$

$a = b : \sin \hat{B}$

$c = b \operatorname{cotg} \hat{B}$

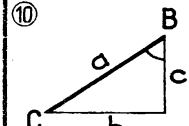
⑨ 

On connait b *et* $\hat{C}$

$\hat{B} = 90^0 - \hat{C}$

$a = b : \cos \hat{C}$

$c = b \operatorname{tg} \hat{C}$

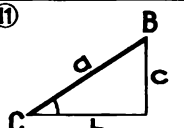
⑩ 

On connait a *et* $\hat{B}$

$\hat{C} = 90^0 - \hat{B}$

$b = a \sin \hat{B}$

$c = a \cos \hat{B}$

⑪ 

On connait a *et* $\hat{C}$

$\hat{B} = 90^0 - \hat{C}$

$b = a \cos \hat{C}$

$c = a \sin \hat{C}$

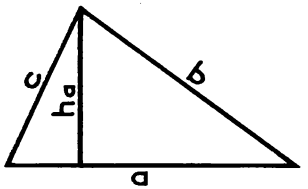
Les valeurs de SIN, COS, TG, COTG sont lues dans les tables (Doc 15,16,17,18)

TRIANGLE QUELCONQUE

Doc 36

RELATIONS MÉTRIQUES

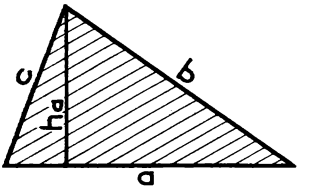
① HAUTEUR (h)



$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

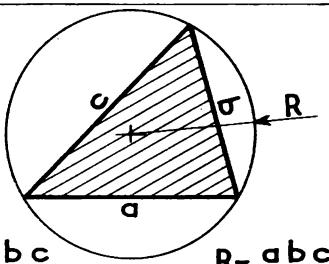
p *ou* $\frac{1}{2}$ *périmètre* $= (a+b+c):2$

② SURFACE (S)



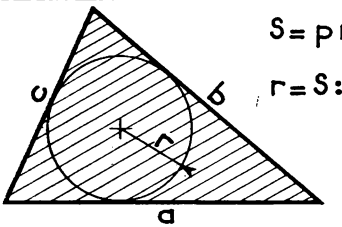
$$S = \frac{a\,h_a}{2}$$

③ CERCLE CIRCONSCRIT



$$S = \frac{a\,b\,c}{4\,R} \qquad R = \frac{a\,b\,c}{4\,S}$$

④ CERCLE INSCRIT



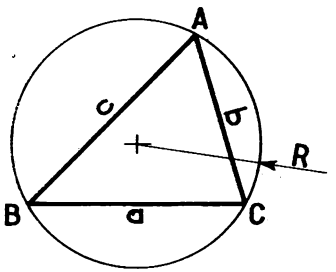
$S = p\,r$

$r = S:p$

p *ou* $\frac{1}{2}$ *périmètre* $= (a+b+c):2$

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

⑤



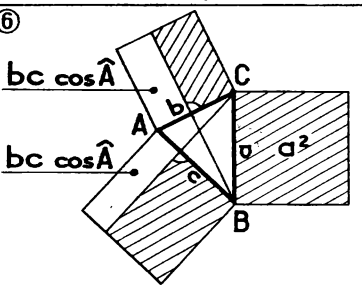
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2\,R$$

$$a = 2\,R\,\sin\hat{A} \qquad \sin\hat{A} = a:2R$$

$$b = 2\,R\,\sin\hat{B} \qquad \sin\hat{B} = b:2R$$

$$c = 2\,R\,\sin\hat{C} \qquad \sin\hat{C} = c:2R$$

⑥



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\hat{A}$$

Si $\hat{A} > 90^0$

son supplément $\alpha = 180^0 - \hat{A}$;

donc $\alpha < 90^0$ *et* $\cos\hat{A} = -\cos\alpha$

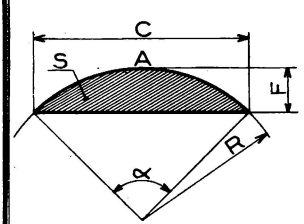
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c\,\cos\alpha$$

Les valeurs de SIN, COS, TG, COTG sont lues dans les tables (Doc 15,16,17,18)

Doc 37 — ARC, CORDE, FLÈCHE, SEGMENT

RAYON = 1 — α = 1° à 90°

α	N	A	C	F	S	α	N	A	C	F	S
1	360	0,017 5	0,017 5	0,000 04	0,000 00	46		0,802 9	0,781 5	0,079 50	0,041 76
2	180	0,034 9	0,034 9	0,000 15	0,000 00	47		0,820 3	0,797 5	0,082 94	0,044 48
3	120	0,052 4	0,052 4	0,000 34	0,000 01	48		0,837 8	0,813 5	0,086 45	0,047 31
4	90	0,069 8	0,069 8	0,000 61	0,000 03	49		0,855 2	0,829 4	0,090 04	0,050 25
5	72	0,087 3	0,087 2	0,000 95	0,000 06	50		0,872 7	0,845 2	0,093 69	0,053 31
6	60	0,104 7	0,104 7	0,001 37	0,000 10	51		0,890 1	0,861 0	0,097 41	0,056 49
7		0,122 2	0,122 1	0,001 87	0,000 15	52		0,907 6	0,876 7	0,101 21	0,059 78
8	45	0,139 6	0,139 5	0,002 44	0,000 23	53		0,925 0	0,892 4	0,105 07	0,063 19
9	40	0,157 1	0,156 9	0,003 08	0,000 32	54		0,942 5	0,908 0	0,108 99	0,066 73
10	36	0,174 5	0,174 3	0,003 81	0,000 44	55		0,959 9	0,923 5	0,112 99	0,070 39
11		0,192 0	0,191 7	0,004 60	0,000 59	56		0,977 4	0,938 9	0,117 05	0,074 17
12	30	0,209 4	0,209 1	0,005 48	0,000 76	57		0,994 8	0,954 3	0,121 18	0,078 08
13		0,226 9	0,226 4	0,006 43	0,000 97	58		1,012 3	0,969 6	0,125 38	0,082 12
14		0,244 3	0,243 7	0,007 45	0,001 21	59		1,029 7	0,984 8	0,129 64	0,086 29
15	24	0,261 8	0,261 1	0,008 56	0,001 49	60	6	1,047 2	1,000 0	0,133 97	0,090 59
16		0,279 3	0,278 3	0,009 73	0,001 81	61		1,064 7	1,015 1	0,138 37	0,095 02
17		0,296 7	0,295 6	0,010 98	0,002 17	62		1,082 1	1,030 1	0,142 83	0,099 58
18	20	0,314 2	0,312 9	0,012 31	0,002 57	63		1,099 6	1,045 0	0,147 36	0,104 28
19		0,331 6	0,330 1	0,013 71	0,003 02	64		1,117 0	1,059 8	0,151 95	0,109 11
20	18	0,349 1	0,347 3	0,015 19	0,003 52	65		1,134 5	1,074 6	0,156 61	0,114 08
21		0,366 5	0,364 5	0,016 75	0,004 08	66		1,151 9	1,089 3	0,161 33	0,119 19
22		0,384 0	0,381 6	0,018 37	0,004 68	67		1,169 4	1,103 9	0,166 11	0,124 43
23		0,401 4	0,398 7	0,020 08	0,005 35	68		1,186 8	1,118 4	0,170 96	0,129 82
24	15	0,418 9	0,415 8	0,021 85	0,006 07	69		1,204 3	1,132 8	0,175 87	0,135 35
25		0,436 3	0,432 9	0,023 70	0,006 86	70		1,221 7	1,147 2	0,180 85	0,141 02
26		0,453 8	0,449 9	0,025 63	0,007 71	71		1,239 2	1,161 4	0,185 88	0,146 83
27		0,471 2	0,466 9	0,027 63	0,008 62	72	5	1,256 6	1,175 6	0,190 98	0,152 79
28		0,488 7	0,483 8	0,029 69	0,009 61	73		1,274 1	1,189 6	0,196 14	0,158 89
29		0,506 1	0,500 8	0,031 85	0,010 67	74		1,291 5	1,203 6	0,201 36	0,165 14
30	12	0,523 6	0,517 6	0,034 07	0,011 80	75		1,309 0	1,217 5	0,206 65	0,171 54
31		0,541 1	0,534 5	0,036 37	0,013 01	76		1,326 5	1,231 3	0,211 99	0,178 08
32		0,558 5	0,551 2	0,038 74	0,014 29	77		1,343 9	1,245 0	0,217 39	0,184 77
33		0,576 0	0,568 0	0,041 18	0,015 66	78		1,361 4	1,258 6	0,222 85	0,191 60
34		0,593 4	0,584 7	0,043 70	0,017 11	79		1,378 8	1,272 2	0,228 38	0,198 59
35		0,610 9	0,601 4	0,046 28	0,018 64	80		1,396 3	1,285 6	0,233 96	0,205 73
36	10	0,628 3	0,618 0	0,048 94	0,020 27	81		1,413 7	1,298 9	0,239 59	0,213 01
37		0,645 8	0,634 6	0,051 68	0,021 98	82		1,431 2	1,312 1	0,245 29	0,220 45
38		0,663 2	0,651 1	0,054 48	0,023 78	83		1,448 6	1,325 2	0,251 04	0,228 04
39		0,680 7	0,667 6	0,057 36	0,025 68	84		1,466 1	1,338 3	0,256 86	0,235 78
40	9	0,698 1	0,684 0	0,060 31	0,027 67	85		1,483 5	1,351 2	0,262 72	0,243 67
41		0,715 6	0,700 4	0,063 33	0,029 76	86		1,501 0	1,364 0	0,268 65	0,251 71
42		0,733 0	0,716 7	0,066 42	0,031 95	87		1,518 4	1,376 7	0,274 63	0,259 90
43		0,750 5	0,733 0	0,069 58	0,034 25	88		1,535 9	1,389 3	0,280 66	0,268 25
44		0,767 9	0,749 2	0,072 81	0,036 64	89		1,553 3	1,401 8	0,286 75	0,276 75
45	8	0,785 4	0,765 4	0,076 12	0,039 15	90	4	1,570 8	1,414 2	0,292 89	0,285 40



- α = Angle
- R = Rayon
- A = Arc
- C = Corde
- F = Flèche
- S = Segment

RELATIONS

Corde $C = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$

ou $C = 2\sqrt{2RF - F^2}$

Flèche $F = R\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$

ou $F = R - \sqrt{R^2 - \frac{C^2}{4}}$

Arc A : $A = \frac{\pi R \alpha}{180}$

Rayon R : $R = \frac{C^2}{8F} + \frac{F}{2}$

ARC, CORDE, FLÈCHE, SEGMENT

RAYON = 1 — α = 91° à 180°

Doc 38

α	N	A	C	F	S	α	N	A	C	F	S
91		1,588 2	1,426 5	0,299 09	0,294 20	136		2,373 6	1,854 4	0,625 39	0,839 49
92		1,605 7	1,438 7	0,305 34	0,303 16	137		2,391 1	1,860 8	0,633 50	0,854 55
93		1,623 2	1,450 7	0,311 65	0,312 26	138		2,408 6	1,867 2	0,641 63	0,869 71
94		1,640 6	1,462 7	0,318 00	0,321 52	139		2,426 0	1,873 3	0,649 79	0,884 97
95		1,658 0	1,474 6	0,324 41	0,330 93	140		2,443 5	1,879 4	0,657 98	0,900 34
96		1,675 5	1,486 3	0,330 87	0,340 50	141		2,460 9	1,885 3	0,666 19	0,915 80
97		1,693 0	1,497 9	0,337 38	0,350 21	142		2,478 4	1,891 0	0,674 43	0,931 35
98		1,710 4	1,509 4	0,343 94	0,360 08	143		2,495 8	1,896 6	0,682 70	0,947 00
99		1,727 9	1,520 8	0,350 55	0,370 09	144		2,513 3	1,902 1	0,690 98	0,962 74
100		1,745 3	1,532 1	0,357 21	0,380 26	145		2,530 7	1,907 4	0,699 29	0,978 58
101		1,762 8	1,543 2	0,363 92	0,390 58	146		2,548 2	1,912 6	0,707 63	0,994 49
102		1,780 2	1,554 3	0,370 68	0,401 04	147		2,565 6	1,917 6	0,715 98	1,010 50
103		1,797 7	1,565 2	0,377 49	0,411 66	148		2,583 1	1,922 5	0,724 36	1,026 58
104		1,815 1	1,576 0	0,384 34	0,422 42	149		2,600 5	1,927 3	0,732 76	1,042 75
105		1,832 6	1,586 7	0,391 24	0,433 34	150		2,618 0	1,931 9	0,741 18	1,059 00
106		1,850 0	1,597 3	0,398 18	0,444 39	151		2,635 4	1,936 3	0,749 62	1,075 32
107		1,867 5	1,607 7	0,405 18	0,455 60	152		2,652 9	1,940 6	0,758 08	1,091 71
108		1,885 0	1,618 0	0,412 21	0,466 95	153		2,670 4	1,944 7	0,766 55	1,108 18
109		1,902 4	1,628 2	0,419 30	0,478 44	154		2,687 8	1,948 7	0,775 05	1,124 72
110		1,919 9	1,638 3	0,426 42	0,490 08	155		2,705 3	1,952 6	0,783 56	1,141 32
111		1,937 3	1,648 3	0,433 59	0,501 87	156		2,722 7	1,956 3	0,792 09	1,157 99
112		1,954 8	1,658 1	0,440 81	0,513 79	157		2,740 2	1,959 8	0,800 63	1,174 72
113		1,972 2	1,667 8	0,448 06	0,525 86	158		2,757 6	1,963 2	0,809 19	1,191 51
114		1,989 7	1,677 3	0,455 36	0,538 07	159		2,775 1	1,966 5	0,817 76	1,208 35
115		2,007 1	1,686 8	0,462 70	0,550 41	160		2,792 5	1,969 6	0,826 35	1,225 25
116		2,024 6	1,696 1	0,470 08	0,562 89	161		2,810 0	1,972 6	0,834 95	1,242 21
117		2,042 0	1,705 3	0,477 50	0,575 51	162		2,827 4	1,975 4	0,843 57	1,259 21
118		2,059 5	1,714 3	0,484 96	0,588 27	163		2,844 9	1,978 0	0,852 19	1,276 26
119		2,076 9	1,723 3	0,492 46	0,601 16	164		2,862 3	1,980 5	0,860 83	1,293 35
120	3	2,094 4	1,732 1	0,500 00	0,614 18	165		2,879 8	1,982 9	0,869 47	1,310 49
121		2,111 8	1,740 7	0,507 58	0,627 34	166		2,897 2	1,985 1	0,878 13	1,327 66
122		2,129 3	1,749 2	0,515 19	0,640 63	167		2,914 7	1,987 1	0,886 80	1,344 87
123		2,146 8	1,757 6	0,522 84	0,654 04	168		2,932 2	1,989 0	0,895 47	1,362 12
124		2,164 2	1,765 9	0,530 53	0,667 59	169		2,949 6	1,990 8	0,904 15	1,379 40
125		2,181 7	1,774 0	0,538 25	0,681 25	170		2,967 1	1,992 4	0,912 84	1,396 71
126		2,199 1	1,782 0	0,546 01	0,695 05	171		2,984 5	1,993 8	0,921 54	1,414 04
127		2,216 6	1,789 9	0,553 80	0,708 97	172		3,002 0	1,995 1	0,930 24	1,431 40
128		2,234 0	1,797 6	0,561 63	0,723 01	173		3,019 4	1,996 3	0,938 95	1,448 78
129		2,251 5	1,805 2	0,569 49	0,737 16	174		3,036 9	1,997 3	0,947 66	1,466 17
130		2,268 9	1,812 6	0,577 38	0,751 44	175		3,054 3	1,998 1	0,956 38	1,483 59
131		2,286 4	1,819 9	0,585 31	0,765 84	176		3,071 8	1,998 8	0,965 10	1,501 01
132		2,303 8	1,827 1	0,593 26	0,780 34	177		3,089 2	1,999 3	0,973 82	1,518 45
133		2,321 3	1,834 1	0,601 25	0,794 97	178		3,106 7	1,999 7	0,982 55	1,535 89
134		2,338 7	1,841 0	0,609 27	0,809 70	179		3,124 1	1,999 9	0,991 27	1,553 34
135		2,356 2	1,847 8	0,617 32	0,824 54	180		3,141 6	2,000 0	1,000 00	1,570 80

NOMBRE DE CÔTÉS (N) DU POLYGONE RÉGULIER

UTILISATION DE LA TABLE : Exemple α = 45°

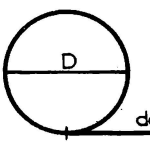
Lecture sur table	En fonction de R	Application : R = 20 mm
A = 0,785 4	Arc = A . R	Arc = 0,785 4 x 20 = 15,708 mm
C = 0,765 4	Corde = C . R	Corde = 0,765 4 x 20 = 15,308 mm
F = 0,076 12	Flèche = F . R	Flèche = 0,076 12 x 20 = 1,522 mm
S = 0,039 15	Segment = S . R^2	Segment = 0,039 15 x 20^2 = 15,66 mm^2

Doc 39 — CIRCONFÉRENCE

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0	3,142	6,283	9,425	12,566	15,708	18,850	21,991	25,133	28,274
1.	31,416	34,558	37,699	40,841	43,982	47,124	50,265	53,407	56,549	59,690
2.	62,832	65,973	69,115	72,257	75,398	78,540	81,681	84,823	87,965	91,106
3.	94,248	97,389	100,531	103,673	106,814	109,956	113,097	116,239	119,381	122,522
4.	125,664	128,806	131,947	135,089	138,230	141,370	144,514	147,655	150,797	153,938
5.	157,08	160,22	163,36	166,50	169,65	172,79	175,93	179,07	182,21	185,35
6.	188,50	191,64	194,78	197,92	201,06	204,20	207,35	210,49	213,63	216,77
7.	219,91	223,05	226,19	229,34	232,48	235,62	238,76	241,90	245,04	248,19
8.	251,33	254,47	257,61	260,75	263,89	267,04	270,18	273,32	276,46	279,60
9.	282,74	285,88	289,03	292,17	295,31	298,45	301,59	304,73	307,88	311,02
10.	314,16	317,30	320,44	323,58	326,73	329,87	333,01	336,15	339,29	342,43
11.	345,58	348,72	351,86	355,00	358,14	361,28	364,42	367,57	370,71	373,85
12.	376,99	380,13	383,27	386,42	389,56	392,70	395,84	398,98	402,12	405,27
13.	408,41	411,55	414,69	417,83	420,97	424,12	427,26	430,40	433,54	436,68
14.	439,82	442,96	446,11	449,25	452,39	455,53	458,67	461,81	464,96	468,10
15.	471,24	474,38	477,52	480,66	483,81	486,95	490,09	493,23	496,37	499,51
16.	502,65	505,80	508,94	512,08	515,22	518,36	521,50	524,65	527,79	530,93
17.	534,07	537,21	540,35	543,50	546,64	549,78	552,92	556,06	559,20	562,35
18.	565,49	568,63	571,77	574,91	578,05	581,19	584,34	587,48	590,62	593,76
19.	596,90	600,04	603,19	606,33	609,47	612,61	615,75	618,89	622,04	625,18
20.	628,32	631,46	634,60	637,74	640,88	644,03	647,17	650,31	653,45	656,59
21.	659,73	662,88	666,02	669,16	672,30	675,44	678,58	681,73	684,87	688,01
22.	691,15	694,29	697,43	700,58	703,72	706,86	710,00	713,14	716,28	719,42
23.	722,57	725,71	728,85	731,99	735,13	738,27	741,42	744,56	747,70	750,84
24.	753,98	757,12	760,27	763,41	766,55	769,69	772,83	775,97	779,11	782,26
25.	785,40	788,54	791,68	794,82	797,96	801,11	804,25	807,39	810,53	813,67
26.	816,81	819,96	823,10	826,24	829,38	832,52	835,66	838,81	841,95	845,09
27.	848,23	851,37	854,51	857,65	860,80	863,94	867,08	870,22	873,36	876,50
28.	879,65	882,79	885,93	889,07	892,21	895,35	898,50	901,64	904,78	907,92
29.	911,06	914,20	917,35	920,49	923,63	926,77	929,91	933,05	936,19	939,34

Exemple : Longueur de la circonférence de diamètre 142 mm
lire : 446,11 mm

Exemple : Diamètre de la circonférence de longueur 860 mm
lire : 274 mm, environ



Développement de la circonférence = π D

$$\pi = \frac{\text{CIRCONFÉRENCE}}{\text{DIAMÈTRE}}$$

π = 3,14159. ...

LONGUEUR DES ARCS DE RAYON = 1

°	VALEURS	′	VALEURS	″	VALEURS
1	0,0175	1	0,000 291	1	0,000 005
2	0,0349	2	0,000 582	2	0,000 010
3	0,0524	3	0,000 873	3	0,000 015
4	0,0698	4	0,001 164	4	0,000 019
5	0,0873	5	0,001 454	5	0,000 024
6	0,1047	6	0,001 745	6	0,000 029
7	0,1222	7	0,002 036	7	0,000 034
8	0,1396	8	0,002 327	8	0,000 039
9	0,1571	9	0,002 618	9	0,000 044
		10	0,002 909	10	0,000 048
		20	0,005 818	20	0,000 097
		30	0,008 727	30	0,000 145
		40	0,011 636	40	0,000 190
		50	0,014 544	50	0,000 242

APPLICATION

La longueur d'un arc de 62° 34′ 15″ s'obtient :

62°	= 1,082 1
30′	= 0,008 727
4′	= 0,001 164
10″	= 0,000 048
5″	= 0,000 024
62° 34′ 15″	= 1,092 063
	l ≃ 1,092

Les longueurs des arcs de ° en ° sont données sur Doc 37 et 38

CERCLE

Doc 40

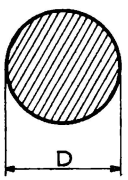
D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0	0,79	3,14	7,07	12,57	19,64	28,27	38,48	50,27	63,62
1.	78,54	95,03	113,10	132,73	153,94	176,72	201,06	226,98	254,47	283,53
2.	314,16	346,36	380,13	415,48	452,39	490,87	530,93	572,56	615,75	660,52
3.	706,86	754,77	804,25	855,30	907,92	962,11	1 017,88	1 075,21	1 134,11	1 194,59
4.	1 256,64	1 320,25	1 385,44	1 452,20	1 520,53	1 590,43	1 661,90	1 734,94	1 809,56	1 885,74
5.	1 963,50	2 042,82	2 123,72	2 206,18	2 290,22	2 375,83	2 463,01	2 551,76	2 642,08	2 733,97
6.	2 827,43	2 922,47	3 019,07	3 117,25	3 216,99	3 318,31	3 421,19	3 525,65	3 631,68	3 739,28
7.	3 848,45	3 959,19	4 071,50	4 185,39	4 300,84	4 417,86	4 536,46	4 656,63	4 778,36	4 901,67
8.	5 026,55	5 153,00	5 281,02	5 410,61	5 541,77	5 674,50	5 808,80	5 944,68	6 082,12	6 221,14
9.	6 361,73	6 503,88	6 647,61	6 792,91	6 939,78	7 088,22	7 238,23	7 389,81	7 542,96	7 697,69
10.	7 854,0	8 011,9	8 171,3	8 332,3	8 494,9	8 659,0	8 824,7	8 992,0	9 160,9	9 331,3
11.	9 503,3	9 676,9	9 852,0	10 028,7	10 207,0	10 386,9	10 568,3	10 751,3	10 935,9	11 122,0
12.	11 309,7	11 499,0	11 689,9	11 882,3	12 076,3	12 271,8	12 469,0	12 667,7	12 868,0	13 069,8
13.	13 273,2	13 478,2	13 684,8	13 892,9	14 102,6	14 313,9	14 526,7	14 741,1	14 957,1	15 174,7
14.	15 393,8	15 614,5	15 836,8	16 060,6	16 286,0	16 513,0	16 741,5	16 971,7	17 203,4	17 436,6
15.	17 671,5	17 907,9	18 145,8	18 385,4	18 626,5	18 869,2	19 113,4	19 359,3	19 606,7	19 855,7
16.	20 106,2	20 358,3	20 612,0	20 867,2	21 124,1	21 382,5	21 642,4	21 904,0	22 167,1	22 431,8
17.	22 698,0	22 965,8	23 235,2	23 506,2	23 778,7	24 052,8	24 328,5	24 605,7	24 884,6	25 164,9
18.	25 446,9	25 730,4	26 015,5	26 302,2	26 590,4	26 880,3	27 171,6	27 464,6	27 759,1	28 055,2
19.	28 352,9	28 652,1	28 952,9	29 255,3	29 559,2	29 864,8	30 171,9	30 480,5	30 790,7	31 102,6
20.	31 415,9	31 730,9	32 047,4	32 365,5	32 685,1	33 006,4	33 329,2	33 653,5	33 979,5	34 307,0
21.	34 636,1	34 966,7	35 298,9	35 632,7	35 968,1	36 305,0	36 643,5	36 983,6	37 325,3	37 668,5
22.	38 013,3	38 359,6	38 707,6	39 057,1	39 408,1	39 760,8	40 115,0	40 470,8	40 828,1	41 187,1
23.	41 547,6	41 909,6	42 273,3	42 638,5	43 005,3	43 373,6	43 743,5	44 115,0	44 488,1	44 862,7
24.	45 238,9	45 616,7	45 996,1	46 377,0	46 759,5	47 143,5	47 529,2	47 916,4	48 305,1	48 695,5
25.	49 087,4	49 480,9	49 875,9	50 272,6	50 670,7	51 070,5	51 471,9	51 874,8	52 279,2	52 685,3
26.	53 092,9	53 502,1	53 912,9	54 325,2	54 739,1	55 154,6	55 571,6	55 990,2	56 410,4	56 832,2
27.	57 255,5	57 680,4	58 106,9	58 534,9	58 964,6	59 395,7	59 828,5	60 262,8	60 698,7	61 136,2
28.	61 575,2	62 015,8	62 458,0	62 901,8	63 347,1	63 794,0	64 242,4	64 692,5	65 144,1	65 597,2
29.	66 052,0	66 508,3	66 966,2	67 425,6	67 886,7	68 349,3	68 813,4	69 279,2	69 746,5	70 215,4

Exemple: Surface d'un cercle de diamètre 28 mm
lire: 615,75 mm²

Exemple: Diamètre d'un cercle de surface 531 mm²
lire: 26 mm environ

SURFACES CIRCULAIRES

① CERCLE

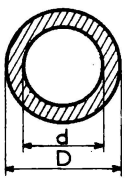


$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

Ex: D = 50 mm

S = 1963,50 mm²

② COURONNE

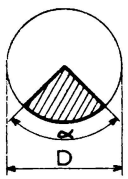


$$S = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$$

Ex: D = 40 mm
d = 30 mm

S = 549,50 mm²

③ SECTEUR

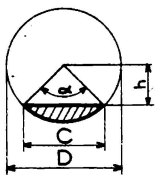


$$S = \frac{\pi D^2 \alpha}{4 \times 360}$$

Ex: D = 25 mm
α = 100°

S = 136,28 mm²

④ SEGMENT



$$S = \text{(secteur)} - \text{(triangle)}$$

$$S = \frac{\pi D^2 \alpha}{4 \times 360} - \frac{C\,h}{2}$$

Ex: D = 40 mm
α = 90°

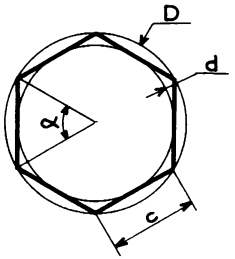
S = 114,16 mm²

Les surfaces des segments de ° en ° sont données sur Doc 37 et 38

Doc 41

SURFACES PLANES

① POLYGONES RÉGULIERS

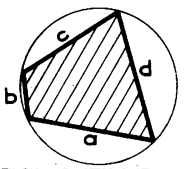


	TRIANGLE	CARRÉ	PENTAGONE	HEXAGONE	OCTOGONE	DÉCAGONE	DODÉCAGONE
N	3	4	5	6	8	10	12
α	120°	90°	72°	60°	45°	36°	30°
	VALEURS POUR D=1						
c	0,866	0,707	0,588	0,500	0,383	0,309	0,259
d	0,500	0,707	0,811	0,866	0,923	0,952	0,967
S	0,325	0,500	0,596	0,650	0,707	0,735	0,750

c = *longueur du côté*
d = *diamètre Φ inscrit*
S = *surface du polygone*

SURFACES USUELLES

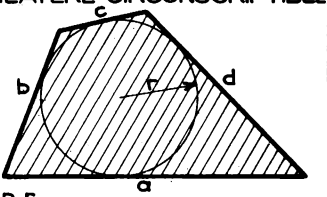
② QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE



$p = \frac{a+b+c+d}{2}$

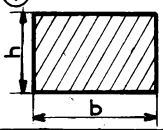
$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

③ QUADRILATÈRE CIRCONSCRIPTIBLE



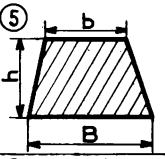
$S = p.r$

④ RECTANGLE



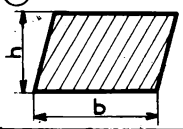
$S = b.h$

⑤ TRAPÈZE



$S = \frac{B+b}{2}.h$

⑥ PARALLÉLOGRAMME

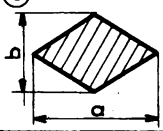


$S = b.h$

⑦ POLYGONE QUELCONQUE

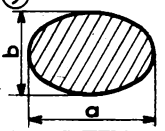
$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$

⑧ LOSANGE



$S = \frac{a.b}{2}$

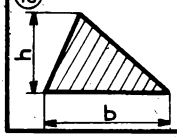
⑨ ELLIPSE



$S = \frac{\pi.a.b}{4}$

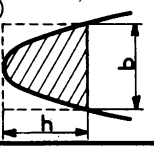
$S = 0{,}785.a.b$

⑩ TRIANGLE



$S = \frac{b.h}{2}$

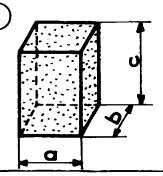
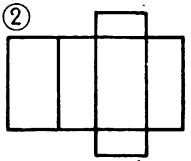
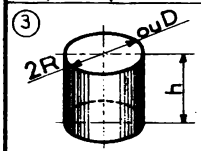
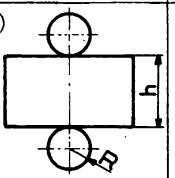
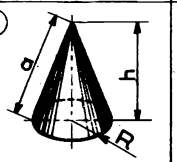
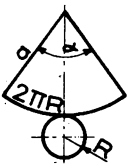
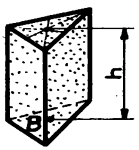
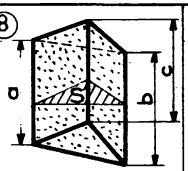
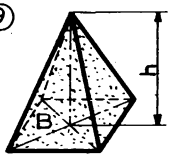
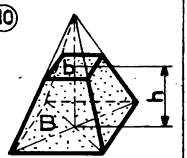
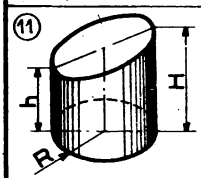
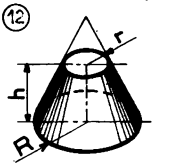
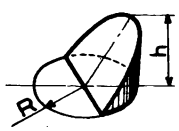
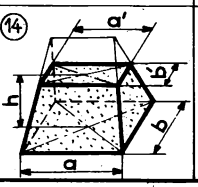
⑪ SEGMENT PARABOLIQUE



$S = \frac{2}{3}(b.h)$

SOLIDES
À SURFACE DÉVELOPPABLE

Doc 42

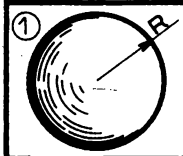
VOLUMES		SURFACES	
① 	PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE $V = a.b.c$ CUBE : $a=b=c$ $V = a^3$	② 	*Développement* $S = 2(ab+bc+ca)$ Pour le CUBE $S = 6a^2$
③ 	CYLINDRE $V = \pi R^2 h$ ou $V = \frac{\pi D^2 h}{4}$	④ 	*Développement* $S_{latérale} = 2\pi Rh$ (Sl) $S_{totale} = 2\pi R(R+h)$ (St)
⑤ 	CÔNE $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$	⑥ 	*Développement* $\alpha = \frac{360° \times R}{a}$ $Sl = \pi Ra$ $St = \pi Ra + \pi R^2$ $= \pi R(R+a)$
VOLUMES			
⑦ 	PRISME $V = B.h$	⑧ 	TRONC DE PRISME TRIANGULAIRE $V = S \times \frac{a+b+c}{3}$ S (*section droite*)
⑨ 	PYRAMIDE $V = \frac{B.h}{3}$	⑩ 	TRONC DE PYRAMIDE $V = \frac{h}{3}(B+b+\sqrt{Bb})$
⑪ 	CYLINDRE TRONQUÉ $V = \pi R^2\left(\frac{H+h}{2}\right)$	⑫ 	TRONC DE CÔNE $V = \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$
⑬ 	ONGLET CYLINDRIQUE $V = \frac{2}{3}R^2 h$	⑭ 	TAS DE CAILLOUX $V = \frac{h}{6}[b(2a+a')+b'(2a'+a)]$

Doc 43

SOLIDES

À SURFACE NON DÉVELOPPABLE

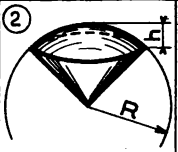
① SPHÈRE



$S = 4\pi R^2 = \pi D^2$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi D^3}{6}$

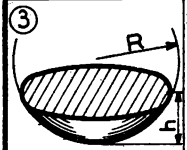
② SECTEUR SPHÉRIQUE



$S_{calotte} = 2\pi Rh$

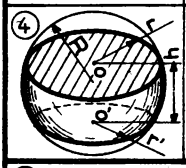
$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

③ SEGMENT SPHÉRIQUE *à une base*



$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$

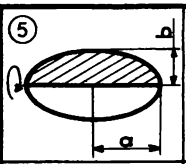
④ SEGMENT SPHÉRIQUE *à deux bases*



$S_{zone} = 2\pi Rh$

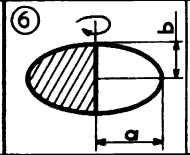
$V = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h}{2}(r^2 + r'^2)$

⑤ ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION *allongé*



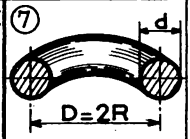
$V = \frac{4}{3}\pi a b^2$

⑥ ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION *aplati*



$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

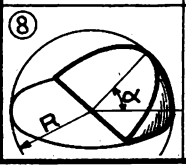
⑦ TORE



$S = \pi^2 Dd$

$V = \frac{\pi^2 Dd^2}{4}$

⑧ ONGLET SPHÉRIQUE



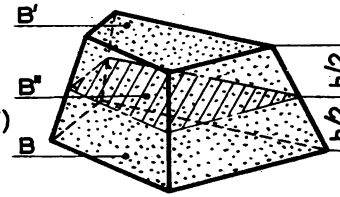
$S_{fuseau} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90}$

$V_{onglet} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270}$

⑨ FORMULE DES 3 NIVEAUX

$B // B' // B''$

$V = \frac{h}{6}(B + B' + 4B'')$

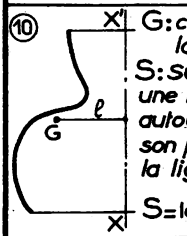


APPLICATIONS:

- *tronc de pyramide*
- *tronc de cône*
- *segment sphérique*
- *tas de sable*

1er THEORÈME DE GULDIN

⑩



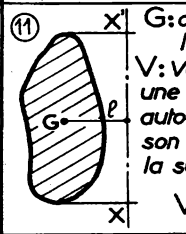
G: *centre de gravité de la ligne*

S: *Surface engendrée par une ligne qui tourne autour d'un axe XX' (de son plan) ne coupant pas la ligne.*

S = longueur ligne $\times 2\pi\ell$

2ème THEORÈME DE GULDIN

⑪



G: *centre de gravité de la surface*

V: *Volume engendré par une surface qui tourne autour d'un axe XX' (de son plan) ne coupant pas la surface.*

V = Surface $\times 2\pi\ell$

⑫ APPLICATION: *centre de gravité de la demi-circonférence:*

$4\pi R^2 = \pi R \times 2\pi\ell$

$\ell = \frac{2R}{\pi} \simeq 0{,}636R$

⑬ APPLICATION: *centre de gravité du demi-cercle:*

$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \times 2\pi\ell$

$\ell = \frac{4R}{3\pi} \simeq 0{,}424R$

CENTRE DE GRAVITÉ

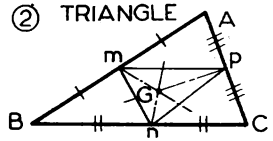
Doc 44

LIGNES

① SEGMENT DE DROITE

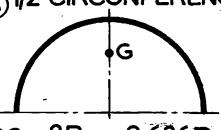
G: *milieu du segment*

② TRIANGLE



G: *point de concours des bissectrices de m n p*

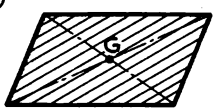
③ 1/2 CIRCONFÉRENCE



$OG = \frac{2R}{\pi} \simeq 0{,}636R$

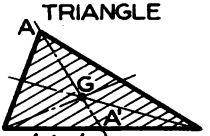
SURFACES

④ PARALLÉLOGRAMME



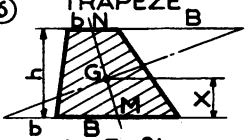
G: *point de rencontre des diagonales*

⑤ TRIANGLE



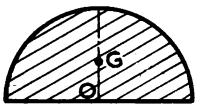
G: *point de concours des médianes* $AG = \frac{AA'}{3}$

⑥ TRAPÈZE



$X = \frac{h}{3} \cdot \frac{B+2b}{B+b}$

⑦ DEMI-CERCLE



$OG = \frac{4R}{3\pi} \simeq 0{,}424R$

⑧ SEGMENT *θ en radians*

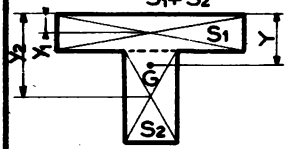
$OG = \frac{2R}{3} \cdot \frac{Sin^3\theta}{\theta - Sin\theta Cos\theta}$

⑨ SECTEUR *θ en radians*

$OG = \frac{2R.Sin\theta}{3\theta}$

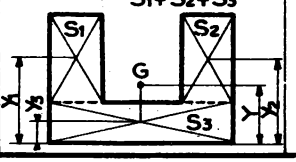
⑩

$Y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}$



⑪

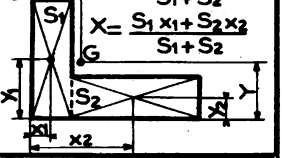
$Y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3}$



⑫

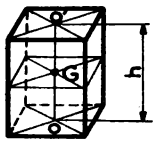
$Y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}$

$X = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2}$



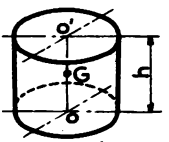
VOLUMES

⑬ PRISME



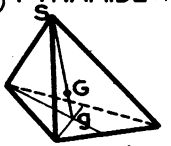
$OG = h/2$

⑭ CYLINDRE



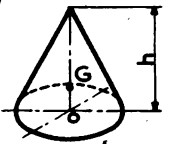
$OG = h/2$

⑮ PYRAMIDE



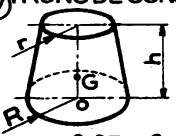
$gG = Sg/4$

⑯ CÔNE



$OG = h/4$

⑰ TRONC DE CÔNE

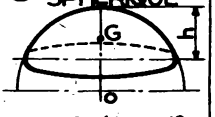


$OG = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$

⑱ SECTEUR SPHÉRIQUE

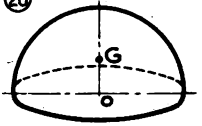
$OG = \frac{3R}{8}(1 + Cos\theta)$

⑲ SEGMENT SPHÉRIQUE



$OG = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2R-h)^2}{3R-h}$

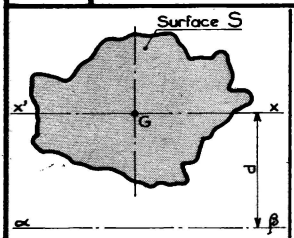
⑳ DEMI-SPHÈRE



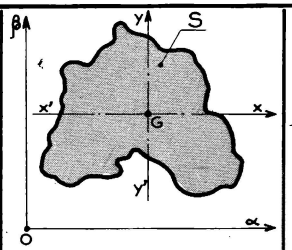
$OG = \frac{3R}{8}$

Doc 45

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

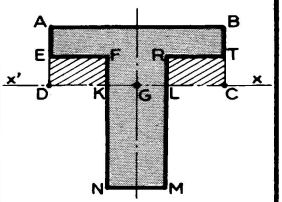


$I_{\alpha\beta} = I_{x'x} + Sd^2$



$I_O = I_{O\alpha} + I_{O\beta}$

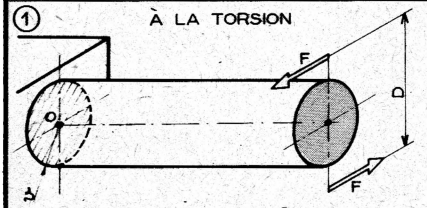
$I_G = I_{x'x} + I_{y'y}$



$I_{x'x}$ (ABTRMNFE) $= I_{x'x}$(ABCD) $- 2I_{x'x}$(EFKD) $+ I_{x'x}$(KLMN)

FORMULES DE CALCUL

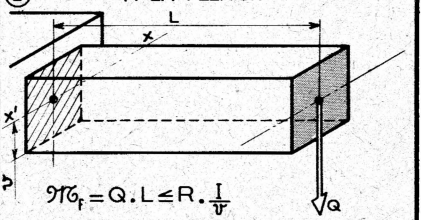
① À LA TORSION



$\mathcal{M}_t = F \cdot D \leq R_g \cdot \frac{I_o}{v}$

R_g . Résistance pratique au glissement transversal
I_o . Moment d'inertie polaire

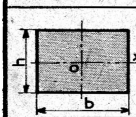
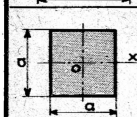
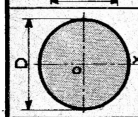
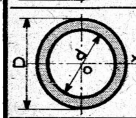
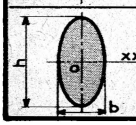
② À LA FLEXION



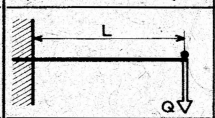
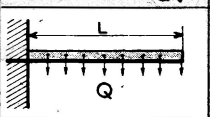
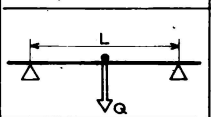
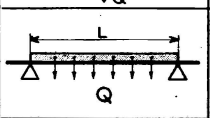
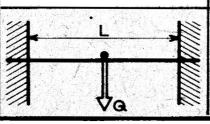
$\mathcal{M}_f = Q \cdot L \leq R \cdot \frac{I}{v}$

R . Résistance pratique à la traction
I . Moment d'inertie par rapport à x'x

MOMENTS D'INERTIE

SECTIONS	TORSION I_o	TORSION v	FLEXION $I_{x'x}$	FLEXION v
	$\frac{bh(b^2+h^2)}{12}$	$\sqrt{\text{de } \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h}{2}$
	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a}{2}$
	$\frac{\pi D^4}{32} \simeq 0{,}1D^4$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi D^4}{64} \simeq 0{,}05D^4$	$\frac{D}{2}$
	$\simeq 0{,}1(D^4-d^4)$	$\frac{D}{2}$	$\simeq 0{,}05(D^4-d^4)$	$\frac{D}{2}$
	$\simeq 0{,}05bh \times (b^2+h^2)$	$\frac{h}{2}$	$\simeq 0{,}5bH^3$	$\frac{h}{2}$

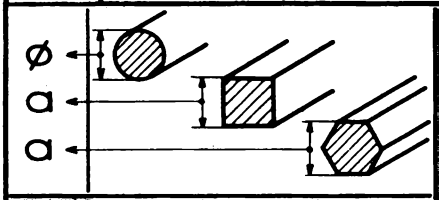
MOMENTS DE FLEXION

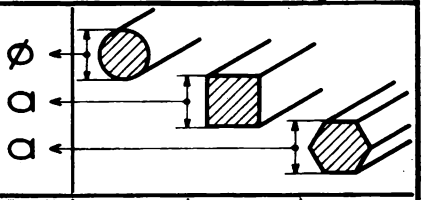
CAS USUELS E (module d'élasticité)	MOMENT fléchissant	FLÈCHE
	QL	$\frac{QL^3}{3EI}$
	$\frac{QL}{2}$	$\frac{QL^3}{8EI}$
	$\frac{QL}{4}$	$\frac{QL^3}{48EI}$
	$\frac{QL}{8}$	$\frac{5}{8} \times \frac{QL^3}{48EI}$
	$\frac{QL}{8}$	$\frac{QL^3}{192EI}$

POIDS DES BARRES

EN kg PAR MÈTRE

Doc 46





ø	a	a	a	ø	a	a	a
5	0,154	0,196	0,170	42	10,9	13,8	12,0
6	0,222	0,283	0,245	44	11,9	15,2	13,2
7	0,302	0,385	0,333	46	13,0	16,6	14,4
8	0,395	0,502	0,435	48	14,2	18,1	15,7
9	0,499	0,636	0,551	50	15,4	19,6	17,0
10	0,617	0,785	0,680	52	16,7	21,2	18,4
11	0,746	0,950	0,823	54	18,0	22,9	19,8
12	0,888	1,130	0,979	56	19,3	24,6	21,3
13	1,04	1,33	1,15	58	20,7	26,4	22,9
14	1,21	1,54	1,31	60	22,2	28,3	24,5
15	1,39	1,77	1,53	65	26,0	33,2	28,7
16	1,58	2,01	1,74	70	30,2	38,5	33,3
17	1,78	2,27	1,96	75	34,7	44,2	38,2
18	2,00	2,54	2,20	80	39,5	50,2	43,5
19	2,23	2,83	2,45	85	44,5	56,7	49,1
20	2,47	3,14	2,72	90	49,9	63,6	55,1
21	2,72	3,46	3,00	95	55,6	70,8	61,4
22	2,98	3,80	3,29	100	61,7	78,5	68,0
23	3,26	4,15	3,60	105	68,0	86,5	
24	3,55	4,52	3,92	110	74,6	95,0	
25	3,85	4,91	4,25	115	81,5	104	
26	4,17	5,31	4,60	120	88,8	113	
27	4,50	5,72	4,96	125	96,3	123	
28	4,83	6,15	5,33	130	104	133	
29	5,19	6,60	5,72	135	112	143	
30	5,55	7,06	6,12	140	121	154	
31	5,92	7,54	6,53	145	130	165	
32	6,31	8,04	6,96	150	139	177	
33	6,71	8,55	7,40	160	158	201	
34	7,13	9,07	7,86	170	178	227	
35	7,55	9,62	8,33	180	200	254	
36	7,99	10,2	8,81	190	223	283	
37	8,44	10,8	9,31	200	247	314	
38	8,90	11,3	9,82	210	272	346	
39	9,38	11,9	10,34	220	298	380	
40	9,87	12,6	10,9	230	326	415	

POIDS DES TÔLES D'ACIER

1m² de tôle de 1mm pèse 7,85kg

1m² ——— e ——— 7,85kg.e

LIRE DIRECTEMENT LE POIDS DES BARRES EN ACIER (δ=7,85)

POUR LES AUTRES MATÉRIAUX MULTIPLIER LA VALEUR LUE PAR

$$K = \frac{\text{densité du matériau}}{\text{densité de l'acier}}$$

QUELQUES VALEURS DE K

Acier	1	Etain	0,93
Aluminium	0,34	Plomb	1,45
Cuivre	1,13	Zinc	0,92

Doc 47

CARACTÉRISTIQUES

	NOMS	SYMBOLE CHIMIQUE OU COMPOSITION	DENSITÉ (1)	TEMPÉRATURE DE FUSION	TEMPÉRATURE D'ÉBULLITION	CHALEUR SPÉCIFIQUE (2)	COEFFICIENT DE DILATATION THERMIQUE
MÉTAUX	Aluminium	Al	2,7	658°		0,225	0,000024
	Antimoine	Sb	6,71	630°		0,050	0,— 011
	Argent	Ag	10,53	960°		0,056	0,— 020
	Chrome	Cr	6,80	1550°		0,120	
	Cobalt	Co	8,80	1490°		0,104	
	Cuivre	Cu	8,90	1090°		0,093	0,— 017
	Etain	Sn	7,30	232°		0,058	0,— 023
	Fer	Fe	7,85	1535°		0,120	0,— 012
	Mercure	Hg	13,60	— 39°		0,033	
	Nickel	Ni	8,90	1452°		0,109	0,— 013
	Or	Au	19,25	1063°		0,031	0,— 014
	Platine	Pt	21,48	1764°		0,038	0,— 009
	Plomb	Pb	11,37	327°		0,031	0,— 029
	Vanadium	V	5,60	1725°		0,115	
	Zinc	Zn	7,19	419°		0,094	0,— 029
ALLIAGES	Acier	Fe, C	7,85	1400°			0,— 012
	Fonte grise	Fe, C	7,2	1230°			0,— 011
	Bronze	Cu, Sn	7,5→8,5	900°			0,— 018
	Bronze d'Alu.	Cu, Sn, Al	≃ 7,5	1060°			
	Laiton	Cu, Zn	7,3→8,4	940°			0,— 019
MÉTALLOIDES	*Azote	N	0,97	— 210°	— 196°		
	Bismuth	Bi	9,80	271°			
	Brome	Br	3,18	— 7°	63°		
	*Chlore	Cl	2,49	— 102°	— 34°		
	*Hydrogène	H	0,07	— 259°	— 253°		
	Iode	I	4,95	184°			
	*Oxygène	O	1,11	— 218°	— 183°		
	Phosphore	P	1,83	44°	287°		
	Soufre	S	2,07	112°	445°		
CORPS COMPOSÉS	*Ac. Sulfureux	SO_2	2,27		— 10°		
	*Ac. Sulfurique	SO_4H_2	1,19				
	Ac. Chlorhydrique	HCl	1,27		110°		
	Alcool	C_2H_6O	0,79	— 130°	78°		
	*Ammoniac	NH_3	0,59		— 33°		
	Benzine	C_6H_6	0,90	5°			
	Eau	H_2O	①	0°	100°		
	Ether	$(C_2H_5)_2O$	0,73	— 117°	35°		
	*Gaz Carbonique	CO_2	1,59	— 56°	— 78°		
	*Méthane	CH_4	0,59		— 165°		
MÉLANGES	*Air	O, N	①		— 191°		
	Caoutchouc		0,98	120°			
	Essence		0,72				
	Graisse		0,94	30°			
	Houille	C	1,2→1,5				
	Huile de lin		0,95		387°		
	Pétrole		0,80		106°		

Chaleur nécessaire pour élever de 1°C la température de 1kg de ce corps (en grandes calories) →

Allongement subi par l'unité de longueur d'un corps entre 0°C et 1°C →

DENSITÉ (δ) d'un corps : *Rapport entre les masses spécifiques du corps et de l'étalon*

SOLIDE-LIQUIDE : $\delta = \frac{corps}{eau}$

GAZ : $\delta = \frac{corps}{air}$

MATIÈRES PLASTIQUES

NOM	NOM CHIMIQUE	COMP.
Bakélite	Phénol-formol	C_7H_8O
Nylon	Polyamide	$C_6H_{11}ON$
Pollopas	Urée-formol	$C_4H_8ON_2$
Plexiglass	Polyoacrylates	$C_5H_8O_2$
Rhodopas	Polyacétate vinyle	$C_4H_6O_2$
Silicones	Silicones	$Si_xC_yH_zO_t$

Nota: Les valeurs indiquées colonnes (1) et (2) s'entendent à 0°C sous la pression atmosphérique de 760 mm de mercure.

* *Corps gazeux à 0°C*

NOTES

NOTES

NOTES

NOTES

NOTES